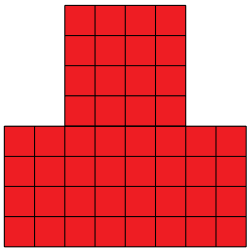
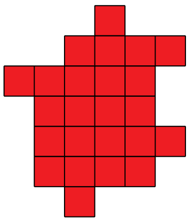
Klassenstufen 7, 8

Aufgabe 1 (4+8+8 Punkte). (a) Zeige, dass sich die folgende Figur (entlang der Linien) in vier kongruente Teilflächen zerlegen lässt.



(b)
- Zeige, dass sich die folgende Figur in sechs kongruente Teilflächen zerlegen lässt.
- Überprüfe, ob es mehrere solcher Möglichkeiten gibt. Gib in dem Fall mindestens eine weitere an.



(c) Zeige, dass sich die Zerlegung der Figur aus Teilaufgabe (b) mit genau zwei Formen von Teilflächen durchführen lässt.

Aufgabe 2 (6+6+8 Punkte)**.** In einem Märchen aus 1001 Nacht bewarben sich mehrere Jünglinge um die Hand der Tochter des Kalifen. Der Kalif stellte alle Bewerber vor schwierige Aufgaben. Nur ein Jüngling hatte alle Hürden erfolgreich genommen. Nun erdachte sich der Kalif eine neue Aufgabe:

Der Jüngling durfte von drei Beuteln einen auswählen und danach aus dem gewählten Beutel eine Kugel ziehen. Eine weiße Kugel sollte das ersehnte Glück bringen, eine schwarze hingegen bedeuten, dass auch dieser Jüngling nicht der richtige Gemahl für die Tochter des Kalifen sei.

In jedem der drei Beutel befanden sich 6 Kugeln:

- im ersten 3 weiße und 3 schwarze,
- im zweiten 2 weiße und 4 schwarze und
- im dritten 1 weiße und 5 schwarze.

Hinweis: Man kann von außen nicht sehen, wie viele oder welche Kugeln in den Beuteln sind.

(a) Bestimme die Chance (Wahrscheinlichkeit) für den Jüngling, dass sein Herzenswunsch in Erfüllung geht.

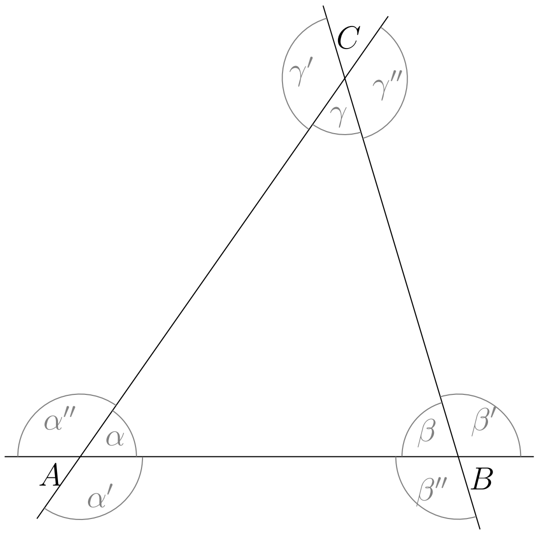
(b) Überprüfe, ob sich die Chance ändert, wenn sich in jedem der drei Beutel 2 weiße und 4 schwarze Kugeln befinden.

Wie in jedem Märchen mischt sich auch in unserem eine gute Fee ein. Um dem Jüngling zu helfen, verteilt sie die 6 weißen und 12 schwarzen Kugeln neu auf die drei Beutel, wobei nun nicht mehr unbedingt in jedem Beutel die gleiche Anzahl von Kugeln sein muss. Kein Beutel darf leer sein.

(c) Weise nach, dass die gute Fee die Kugeln so verteilen kann, dass die Chance für die Erfüllung seines Herzenswunsches $\frac{3}{4}$ beträgt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Ist es möglich, dass die Fee die Kugeln so verteilt, dass die Chance besser als $\frac{3}{4}$ ist?

Aufgabe 3 (8+6+6 Punkte)**.** In einem Dreieck ΔABC seien die Innenwinkel mit α, β und γ benannt. Die Außenwinkel (also die Nebenwinkel zu den Innenwinkeln) werden mit α', α'', β', β'', γ' und γ'' bezeichnet, wie in der folgenden Skizze ersichtlich:



(a) • Berechne für ein Dreieck mit $\alpha = 35°$ und $\beta = 75°$ alle Außenwinkel. (Die Skizze ist nicht maßstabsgerecht.)

• Berechne die Summe dieser sechs Außenwinkel.

(b) Weise nach, dass die Summe aller sechs Außenwinkel in allen Dreiecken gleich groß ist.

(c) Beweise, dass es kein Dreieck gibt, bei dem die Winkelhalbierenden durch α' und β parallel sind.

Aufgabe 4 (3+3+4+4+6 Punkte)**.** In ein Zahlendreieck seien die ungeraden Zahlen eingetragen, in die erste Zeile eine Zahl, in die nächste drei, dann fünf und so weiter:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & 5 & 7 & & \\ & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & \\ 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31 \\ & & & \dots & & & \end{array}$$

Die Position (m, n) bezeichne die n-te Zahl in der m-ten Zeile, beispielsweise ist die Zahl 23 an Position $(4, 3)$.

(a) Bestimme die Zahl, die an der Position $(7, 3)$ steht.

(b) Bestimme die Position der Zahl 99.

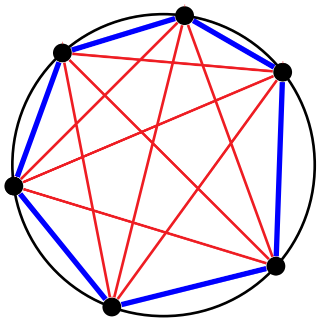
(c) Bestimme die Zahl, die an der Position $(30, 10)$ steht.

(d) Bestimme die Position der Zahl 3333.

(e) Bestimme einen allgemeinen Ausdruck für die Zahl, die in der m-ten Zeile an der letzten Stelle steht.

Hinweis: „Bestimme“ schließt jeweils „beweise“ mit ein.

Klassenstufen 9, 10



Aufgabe 1 (6+8+6 Punkte). (a) Auf einem Kreis werden sieben Punkte gesetzt und zu einem (nicht überschlagenen) Siebeneck verbunden.

Zeige, dass dieses Siebeneck 14 Diagonalen aufweist.

(b) Auf einem Kreis werden n Punkte gesetzt und zu einem (nicht überschlagenen) n-Eck verbunden.

Finde eine Formel, die die Anzahl der Diagonalen in diesem n-Eck angibt, und beweise die Gültigkeit der Formel.

(c) Bei dem Siebeneck aus Aufgabenteil (a) können Dreiecke aus je drei Eckpunkten gebildet werden.

Bestimme, wie viele derartige Dreiecke es gibt.

Aufgabe 2 (4+6+4+6 Punkte)**.** Gegeben sind die drei natürlichen Zahlen

$$k = 3^7 + 7^3, \quad m = 7^{13} + 13^7 \quad \text{und} \quad n = 29^{31} + 31^{29}\,.$$

(a) Zeige, dass k durch 10 teilbar ist.

(b) Die drei Zahlen k, m und n haben alle die Form $p^q + q^p$, wobei p und q verschiedene Primzahlen sind. Zeige, dass solche Summen weder durch p noch durch q teilbar sind (mit beliebigen Primzahlen p und q).

(c) Beweise, dass m nicht durch 10 teilbar ist, wohl aber durch 4.

Hinweis: Schreibe die Summanden geschickt um, sinnvoll ist zum Beispiel $m = (8-1)^{13} + (12+1)^7$.

(d) Zeige, dass n durch 60 teilbar ist.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Entscheide, welcher der beiden Summanden von n größer ist.

Aufgabe 3 (4+6+4+6 Punkte). (a) Gegeben ist das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 169, \tag{1}$$
$$x + y = 17. \tag{2}$$

Finde alle reellen Lösungspaare dieses Gleichungssystems.

Hinweis: Die Gleichung (1) beschreibt einen Kreis um den Ursprung.

(b) Verändere die Kreisgleichung (1) so, dass das Gleichungssystem aus der neuen Gleichung (1') und der Gleichung (2) genau ein Lösungspaar aufweist und die neue Gleichung (1') keine Gerade beschreibt.

(c) Gegeben ist jetzt das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 169, \tag{3}$$
$$|x + y| = 17. \tag{4}$$

Finde alle reellen Lösungspaare dieses Gleichungssystems.

(d) Verändere die Gleichung (4) so zu einer Gleichung (4'), dass das Gleichungssystem aus den Gleichungen (3) und (4') genau acht Lösungspaare aufweist, und zeige, dass die so gewonnene Gleichung im Gleichungssystem diese Bedingung erfüllt.

Aufgabe 4 (4+6+10 Punkte)**.** Zwei Spieler A und B spielen ein Nim-Spiel mit drei Haufen Bohnen. In einem Zug kann ein Spieler von einem Haufen zwischen 1 und 3 Bohnen entfernen. Die Spieler ziehen abwechselnd, Spieler A beginnt. Wer keinen Zug mehr machen kann, hat verloren.

(a) Am Anfang bestehen die Haufen aus 1, 7 und 13 Bohnen (wir bezeichnen die Situation durch $[1, 7, 13]$). Spielt die Situation einige Male für euch durch.

Entscheide, ob Spieler A oder Spieler B den Sieg erzwingen kann (ob es sich also um eine Gewinn- oder Verluststellung handelt, siehe Hinweis unten).

(b) Entscheide entsprechend für die Anfangssituation $[5, 10, 15]$.

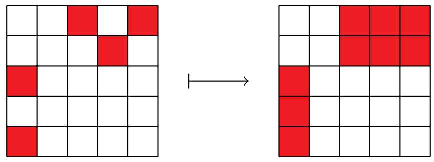
(c) Beschreibe und begründe eine vollständige Gewinnstrategie.

Hinweis zu den Begriffen: Ist man an der Reihe und findet eine *Gewinnstellung* vor, so kann man unabhängig von den Zügen des Gegners gewinnen. Findet man eine *Verluststellung* vor, so ist dies nicht unabhängig von den Zügen des Gegners möglich (man kann den Sieg also nicht erzwingen).

Eine *vollständige Gewinnstrategie* beschreibt die Gewinnstellungen und gibt für jede einen Zug an, der in eine Verluststellung führt (mit dem man also gewinnen kann). Für alle Verluststellungen ist zu beweisen, dass jeder mögliche Zug in eine Gewinnstellung führt.

Oberstufe (11, 12, 13)

Aufgabe 1 (4+6+4+6 Punkte)**.** In einem $n \times n$-Feld sind einige Zellen infiziert. Diese Infektion breitet sich schrittweise aus: Eine gesunde Zelle wird im nächsten Schritt infiziert, falls mindestens zwei ihrer direkten Nachbarn infiziert sind. (Die direkten Nachbarn einer Zelle sind die Zellen, die mit ihr eine Kante gemeinsam haben.) Bereits infizierte Zellen bleiben infiziert. Zum Beispiel:



In diesem Beispiel wird im nächsten Schritt keine weitere Zelle infiziert.

(a) Zeige, dass es im Fall $n = 4$ möglich ist, genau vier infizierte Zellen auszuwählen, welche (nach einigen Schritten) das gesamte Feld infizieren.

(b) Zeige, dass dies mit drei Zellen nicht möglich ist.

(c) Zeige, dass man allgemein stets n Zellen auswählen kann, welche das gesamte Feld infizieren.

(d) Zeige, dass man hierfür stets mindestens $\frac{n}{2}$ infizierte Zellen benötigt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Zeige, dass weniger als n infizierte Zellen ein $n \times n$-Feld nicht komplett infizieren können.

Aufgabe 2 (4+8+8 Punkte)**.** Es seien gerade Stöckchen (mathematisch: Strecken) gegeben und man soll die Stöckchen so zurechtschneiden, dass man damit bestimmte Vielecke legen oder nicht legen kann.

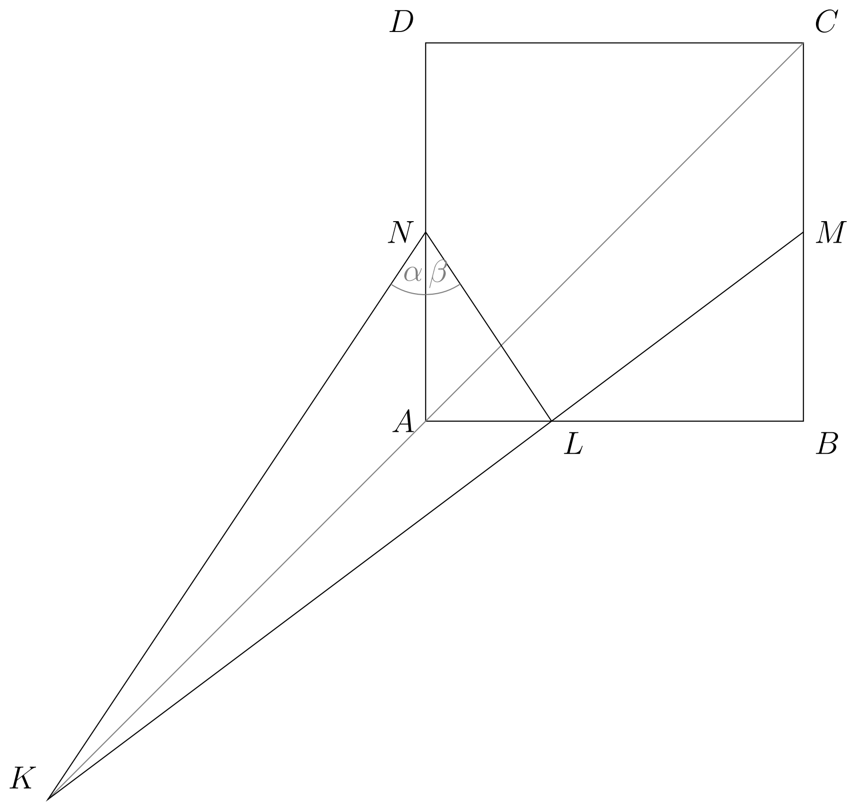
(a) Wähle die Längen von vier Stöckchen so, dass es unmöglich ist, ein Viereck damit zu legen.

(b) Wähle die Längen von vier Stöckchen so, dass man damit ein Viereck legen kann, es aber unmöglich ist, ein Dreieck zu legen, egal mit welchen drei der vier Stöckchen man es probiert.

(c) Wähle die Längen von 101 Stöckchen so, dass man damit ein 101-Eck legen kann, es aber für jedes $k = 3, \dots, 100$ unmöglich ist, k Stöckchen, unter den 101 Stöckchen auszuwählen, mit denen sich ein k-Eck legen lässt.

Hinweis: Die tatsächliche Konstruktion muss nicht angegeben oder bewiesen werden.

Aufgabe 3 (10+10 Punkte)**.** Es sei $ABCD$ ein Quadrat, M der Mittelpunkt von BC und N der Mittelpunkt von AD. Der Punkt K liege auf der Verlängerung von AC über A hinaus und L sei der Schnittpunkt von KM und AB.



(a) Zeige für den Spezialfall $|KA| = |AC|$, dass $\angle KNA = \angle ANL$ gilt ($\alpha = \beta$ in der Zeichnung).

(b) Zeige, dass stets $\angle KNA = \angle ANL$ gilt (also nicht nur für $|KA| = |AC|$).

Aufgabe 4 (4+8+8 Punkte)**.** Gesucht sind n-stellige Zahlen mit folgender Eigenschaft: Die letzten n Ziffern des Quadrates dieser Zahl bilden diese Zahl selbst. (Die erste Ziffer der n-stelligen Zahl darf hier auch eine 0 sein.) Beispiele für dreistellige Zahlen mit dieser Eigenschaft sind 000 und 001.

(a) Finde alle ein- und zweistelligen Zahlen mit dieser Eigenschaft.

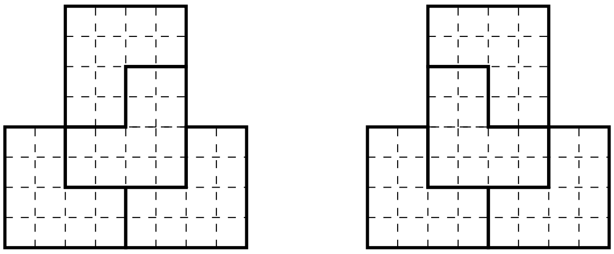
(b) Zeige, dass es jeweils genau vier drei- bzw. vierstellige Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt.

(c) Zeige, dass es für jedes beliebige n genau vier n-stellige Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt.

Hinweis: Es gibt Teilpunkte, wenn statt „genau“ nur „höchstens“ oder „mindestens“ gezeigt wird.

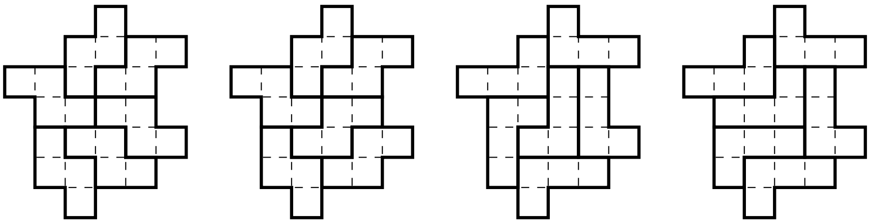
Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) Mögliche Zerlegungen sind:

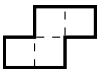
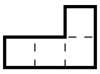
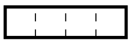


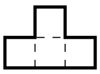
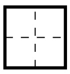
Dies sind sogar alle Möglichkeiten.

(b) Es gibt mehrere Zerlegungen:



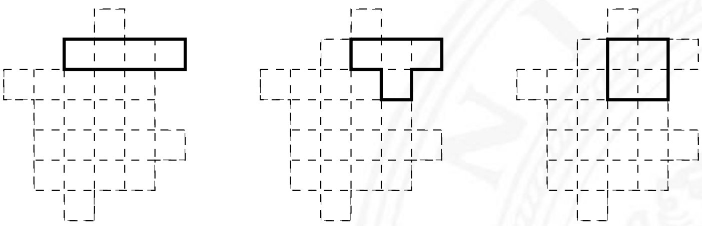
(c) Die Figur besteht aus 24 Quadraten, also muss jede der sechs Teilflächen aus vier Quadraten bestehen. Es gibt fünf verschiedene paarweise nicht kongruente Flächen, die aus vier Quadraten bestehen:

(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

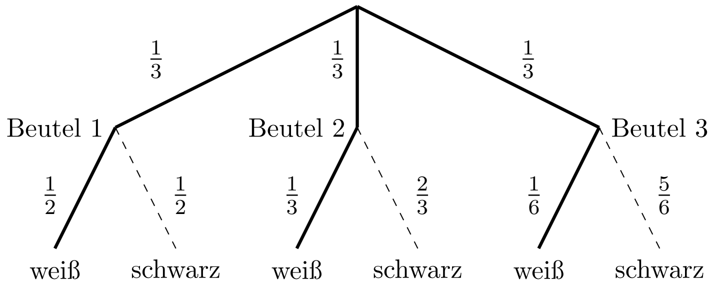
Zerlegungen in Flächen der Form (A) bzw. (B) sind schon in der Lösung zu Teilaufgabe (b) angegeben.

Zerlegungen in Flächen der Form (C), (D) oder (E) sind nicht möglich. Eine Form muss wie folgt in die Figur gelegt werden, um das „überstehende“ Kästchen rechts oben bzw. das daneben zu überdecken:



Dies trennt aber ein einzelnes Quadrat ab.

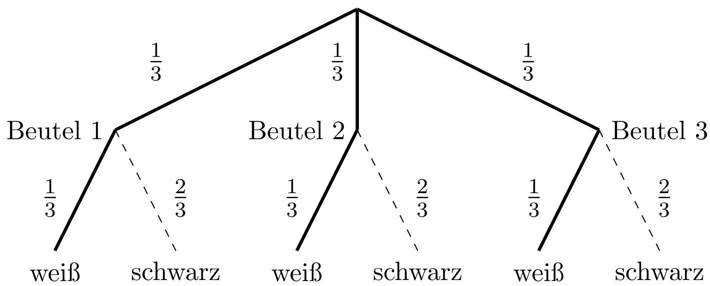
Lösung 2. (a) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich mithilfe eines Baumdiagramms ermitteln:



Der Herzenswunsch wird genau entlang der fett gedruckten Äste erfüllt. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

(b) Wie in Teilaufgabe (a) ermitteln wir die Wahrscheinlichkeit mittels eines Baumdiagramms:



Der Herzenswunsch wird wieder genau entlang der fett gedruckten Äste erfüllt. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

und ändert sich daher nicht.

Allgemein gilt, dass die Wahrscheinlichkeit immer $\frac{1}{3}$ beträgt, wenn die vorhandenen Kugeln auf drei Beutel mit je 6 Kugeln verteilt werden: Jeder Beutel wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ gewählt, danach wird jede seiner Kugeln mit gleicher Wahrscheinlichkeit (also $\frac{1}{6}$) gezogen. Insgesamt hat somit jede Kugel die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$. Da es 6 weiße Kugeln gibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

(c) Verteilt die Fee die Kugeln so, dass alle schwarzen Kugeln im gleichen Beutel sind, zieht der Jüngling in jedem Fall eine weiße Kugel, falls er einen der beiden anderen Beutel wählt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{2}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, aus dem dritten Beutel eine weiße Kugel zu ziehen, wird umso größer, je mehr weiße Kugeln er enthält. Deshalb verteilt die Fee die Kugeln wie folgt: In die ersten beiden Beutel kommt je eine weiße Kugel, in den dritten Beutel die restlichen 4 weißen Kugeln sowie die 12 schwarzen. Die Chance für den Jüngling beträgt nun

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{16} = \frac{1}{3} \cdot \left(2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}.$$

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Jede einzelne Kugel aus einem Beutel mit k Kugeln wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k}$ gezogen, diese Zahl ist umso kleiner, desto größer k ist. Weil kein Beutel leer sein darf, kann auch kein Beutel mehr als 16 Kugeln enthalten. Jede einzelne Kugel wird also mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16}$ gezogen. Da es 12 schwarze Kugeln gibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, mindestens

$$12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}.$$

Daher kann die Fee die Kugeln nicht so verteilen, dass die Chance besser als $\frac{3}{4}$ ist.

Lösung 3. (a) Die Nebenwinkel ergänzen den Innenwinkel jeweils zu einem gestreckten Winkel, also zu 180°.

Also gilt:

$$\begin{aligned} \alpha' = \alpha'' &= 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ, \\ \beta' = \beta'' &= 180^\circ - \beta = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ. \end{aligned}$$

Da die Winkelsumme im Dreieck stets 180° ist, ergibt sich

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 35^\circ - 75^\circ = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

Daraus folgt:

$$\gamma' = \gamma'' = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Die Summe aller Außenwinkel ergibt sich daher zu

$$\begin{aligned} \alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' + \gamma' + \gamma'' &= 2 \cdot 145^\circ + 2 \cdot 105^\circ + 2 \cdot 110^\circ \\ &= 290^\circ + 210^\circ + 220^\circ \\ &= 720^\circ. \end{aligned}$$

(b) Die Summe der Vollwinkel um die Punkte A, B und C beträgt $3 \cdot 360° = 1080°$. Um die Summe der Außenwinkel zu erhalten, muss die Summe der Innenwinkel und deren Scheitelwinkel von 1080° subtrahiert werden. Die Summe der Innenwinkel ist als Winkelsumme im Dreieck gerade 180°. Da die Scheitelwinkel genauso groß wie die Innenwinkel sind, ist die Summe der Scheitelwinkel ebenfalls 180°. Daher ist die Summe der Außenwinkel gerade

$$1080° - 2 \cdot 180° = 1080° - 360° = 720°.$$

(c) Wenn die Winkelhalbierenden von α' und β parallel wären, müsste $\alpha' = \beta$ gelten, weil die halben Winkel (von α' und β) dann Wechselwinkel wären. Da

$$\alpha' = 180° - \alpha \quad \text{und} \quad \beta = 180° - \alpha - \gamma$$

gilt, müsste

$$180° - \alpha = \alpha' = \beta = 180° - \alpha - \gamma,$$

also $\gamma = 0°$ gelten, ein Widerspruch. Also sind in jedem Dreieck die Winkelhalbierenden von α' und β nicht parallel.

Lösung 4. (a) Die Anzahl der ungeraden Zahlen in einer Zeile erhöht sich jeweils um 2. Es stehen also zunächst 1, dann 3, dann 5, dann 7, dann 9, dann 11, dann 13 usw. ungerade Zahlen in einer Zeile. Vor der Zahl an Position $(7, 3)$ stehen demnach

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 2 = 38$$

ungerade Zahlen. An der Position $(7, 3)$ steht also die 39ste ungerade Zahl. Dies ist die $2 \cdot 39 - 1 = 77$.

(b) Die Zahl 99 ist die 50ste ungerade Zahl. Da in den ersten 7 Zeilen insgesamt

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$$

stehen, ist die Position der 99 demnach $(8, 1)$.

(c) In jeder Zeile steht eine ungerade Anzahl an ungeraden Zahlen und zwar ist diese Anzahl in der m-ten Zeile gerade die m-te ungerade Zahl. Die Anzahl der ungeraden Zahlen in allen Zeilen bis einschließlich der m-ten Zeile ist also gerade gleich der Summe aller ungeraden Zahlen bis einschließlich der m-ten. Diese Summe ist gleich m^2. Dies wird am Ende der Lösung dieser Aufgabe bewiesen. An Position $(30, 10)$ steht also die 851ste ungerade Zahl, denn

$$29^2 + 10 = 841 + 10 = 851.$$

Die 851ste ungerade Zahl ist die Zahl $2 \cdot 851 - 1 = 1701$. Also steht 1701 an Position $(30, 10)$.

(d) Die Zahl 3333 ist die 1667ste ungerade Zahl. Da

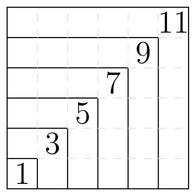
$$40^2 = 1600 < 1667 \qquad \text{und} \qquad 41^2 = 1681 > 1667$$

ist, steht die Zahl 3333 in der 41sten Zeile und zwar an Position $(41, 67)$, denn

$$40^2 + 67 = 1600 + 67 = 1667.$$

(e) An der letzten Stelle der m-ten Zeile steht nach der Beobachtung aus Teilaufgabe (b) die m^2-te ungerade Zahl. Diese lässt sich folglich durch den Ausdruck $2m^2 - 1$ berechnen.

Begründung, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gerade n^2 ist:



Mit jeweils der nächsten ungeraden Zahl kann man ein Quadrat um eine Zeile und eine Spalte, die ein gemeinsames Kästchen haben, ergänzen, da die nächste ungerade Zahl jeweils um 2 größer ist.

Lösungen 9, 10

Lösung 1. (a) Beweis zum Beispiel durch Aufzeichnen und Abzählen, da die Anzahl nicht von der Lage der Punkte abhängt.

(b) Die Anzahl der Diagonalen beträgt $\frac{n(n-3)}{2}$.

Beweis: Von jedem der n Eckpunkte gehen $n-3$ Diagonalen aus (nicht zum Punkt selbst und nicht zu den beiden Nachbarpunkten). Um nicht jede Diagonale doppelt zu zählen, muss man $n(n-3)$ noch halbieren.

(c) Jeder der sieben Punkte kann zunächst mit einem der sechs anderen Punkte verbunden werden. Dann ist einer der fünf restlichen Punkte zu wählen, um ein Dreieck zu bilden. Allerdings werden die drei Punkte des Dreiecks auf diese Art in einer festen Reihenfolge ausgewählt. Da die Punkte eines Dreiecks auf $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Arten geordnet werden können, wird in der angegeben Aufzählung jedes Dreieck 6 mal gezählt. Also ergibt sich die Anzahl

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35.$$

Bemerkung: Man wählt jeweils 3 aus 7 Punkten aus. Die Anzahl der Möglichkeiten, 3 Objekte von 7 auszuwählen, wobei es nicht auf die Reihenfolge ankommt, kann über die allgemein gültige Formel berechnet werden. Man schreibt:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = 35$$

Lösung 2. (a) $k = 2530$ (direkt zu errechnen), k hat also Endziffer 0 und ist demnach durch 10 teilbar.

(b) Da p und q verschiedene Primzahlen sind und q^p nur den Primteiler q aufweist, ist q^p nicht durch p teilbar. Da andererseits p^q durch p teilbar ist, ist damit die Summe nicht durch p teilbar. Der Beweis, dass die Summe nicht durch q teilbar ist, ist analog: Man vertauscht p und q.

(c) Beim Multiplizieren und dadurch auch beim Potenzieren wirkt sich nur die letzte Stelle der Zahl auf die letzte Stelle des Ergebnisses aus, weshalb man diese für sich berechnen kann.

Die letzte Stelle von 7^k wiederholt sich, wenn k um vier erhöht wird, ist also abwechselnd 7, 9, 3 und 1. Für 13^k wiederholen sich 3, 9, 7 und 1. Die letzte Stelle von 7^{13} und 13^7 ist also jeweils eine 7, weshalb m als letzte Stelle eine 4 hat und somit nicht durch 10 teilbar ist.

Unter Verwendung des Hinweises $m = (8-1)^{13} + (12+1)^7$ kann so argumentiert werden: Der erste Summand von m hat einen Achterrest von $(-1)^{13} = -1$ und der zweite Summand hat einen Zwölferrest von $(+1)^7 = 1$.

Da 4 ein gemeinsamer Teiler von 8 und 12 ist, bedeutet dies, dass sich die Viererreste gerade aufheben. Also ist m durch 4 teilbar.

(d) Wie im vorigen Aufgabenteil nutzen wir die Zerlegung

$$n = (30-1)^{31} + (30+1)^{29}.$$

Der erste Summand liefert einen 30-Rest von -1, der zweite einen von $+1$, so dass n durch 30 teilbar ist. Es fehlt noch ein Faktor 2.

Da $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ die 2 nur als einfachen Faktor enthält, ist es hinreichend zu zeigen, dass sich die 2 aus n mindestens zweimal ausfaktorisieren lässt, also Teilbarkeit durch 4 nachzuweisen. Wegen $n = (7\cdot 4+1)^{31} + (8\cdot 4-1)^{29}$, erhält man die Teilbarkeit von n durch 4.

Natürlich kann nacheinander die Teilbarkeit durch 3, 4 und 5 gezeigt werden. Da diese drei Zahlen zueinander teilerfremd sind, ist dann ebenfalls die Teilbarkeit durch 60 gezeigt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Zuerst schreiben wir 31^{29} wie folgt um

$$31^{29} = 29^{29}\left(\frac{31}{29}\right)^{29}.$$

Falls also $\left(\frac{31}{29}\right)^{29} < 29^2$, dann folgt $31^{29} < 29^{31}$. Die Abschätzung $\left(\frac{31}{29}\right)^{29} < 29^2$ lässt sich auf verschiedenen Wegen herleiten. In mehreren Schritten wird dafür die folgende Ungleichungskette gezeigt:

$$\left(\frac{31}{29}\right)^{29} < \left(\frac{31}{29}\right)^{32} < \left(\frac{11}{10}\right)^{32} = \left(\left(\frac{11}{10}\right)^{4}\right)^{8} < 2^8 = 256 < 400 = 20^2 < 29^2$$

Die erste Abschätzung ist offensichtlich und da $31\cdot 10 = 310 < 319 = 11 \cdot 29$ und somit $\frac{31}{29} < \frac{11}{10}$, gilt auch die zweite Abschätzung. Die nächste Identität ist eine Anwendung der Potenzregeln. Die folgende Abschätzung kann man einfach nachrechnen, da $11^4 = 121^2 = 14641$ und $10^4 = 10000$. Schließlich gilt $2^8 = 4\cdot 4^3 = 4\cdot 64 = 256$ und die restlichen Abschätzungen sind offensichtlich.

Lösung 3. (a) Die Gleichung (2) beschreibt eine Gerade mit der Steigung -1, die den Kreis in maximal zwei Punkten schneiden kann. Die Punkte $(5|12)$

und (12|5) erfüllen mit ihren Koordinaten beide Gleichungen, also ist die Lösungsmenge

$$L_a = \{(5|12), (12|5)\} .$$

Ebenso ist es möglich, beide Gleichungen zum Beispiel nach y aufzulösen und dann gleichzusetzen:

$$\pm\sqrt{169 - x^2} = -x + 17$$

Quadrieren ergibt dann die (nicht äquivalente) Gleichung

$$169 - x^2 = x^2 - 34x + 289,$$

was die beiden Lösungen $x = 5$ oder $x = 12$ ergibt und damit auch die zugehörigen y-Koordinaten. Allerdings ist hier noch eine Probe nötig.

(b) Die Aufgabenstellung legt es nahe, den Kreismittelpunkt zu belassen und lediglich den Radius zu verkleinern, so dass der Kreis die Gerade nur noch berührt. Dafür ersetzt man in der Rechnung von Aufgabenteil (a) die 169 durch r^2 und erhält

$$0 = x^2 - 17x + \frac{289 - r^2}{2} = \left(x - \frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{17}{2}\right)^2 + \frac{289}{2} - \frac{r^2}{2} .$$

Diese Gleichung hat genau dann nur eine Lösung für x, falls $\frac{17}{2}$ eine doppelte Nullstelle ist, also falls

$$r^2 = 2 \cdot \left(\frac{289}{2} - \left(\frac{17}{2}\right)^2\right) = 289 - \frac{17^2}{2} = \frac{17^2}{2} .$$

Dies ist beim Radius $r = \frac{17}{\sqrt{2}}$ erreicht mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = \frac{17^2}{2} = \frac{289}{2} \tag{1'}$$

und der Lösungsmenge $L_b \left\{\left(\frac{17}{2}|\frac{17}{2}\right)\right\}$.

Die Idee, den Kreis zu verschieben, so dass er die Gerade nur noch berührt, ist nach der Aufgabenstellung auch möglich. Hier sind verschiedene Lösungen denkbar, zum Beispiel

$$\left(x + \frac{13}{\sqrt{2}} - \frac{17}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{\sqrt{2}} - \frac{17}{2}\right)^2 = 169 \tag{1'}$$

mit $L_b = \left\{\left(\frac{17}{2}|\frac{17}{2}\right)\right\}$.

(c) Die Gleichung (4) beschreibt zwei Geraden, nämlich

$$y = -x + 17 \quad \text{und} \quad y = -x - 17.$$

Die Lösungen können dann für jede der beiden Geraden wie im ersten Teil berechnet werden. So erhält man die folgenden vier Lösungen.

$$L_c = \{(5|12), (12|5), (-5|-12), (-12|-5)\}.$$

Einsetzen liefert, dass es sich tatsächlich um vier Lösungen handelt.

(d) Naheliegend ist jetzt, vier Geraden in der Gleichung (4') zusammenzufassen, zum Beispiel in

$$|x| + |y| = 17, \tag{4'}$$

was zusätzlich zu den beiden Geraden aus (4) die Geraden $y = x + 17$ und $y = x - 17$ beinhaltet. Die Lösungsmenge

$$L_d = \big\{(5|12), (12|5), (-5|-12), (-12|-5), \\ (5|-12), (-12|5), (-5|12), (12|-5)\big\}$$

hat genau acht Elemente. (Auch hier reicht Einsetzen.)

Hinweis: Es wird jeweils mit geometrischen Objekten und deren Eigenschaften argumentiert. Dass es nicht mehr Punkte als Lösung der Gleichungen gibt, folgt aber auch direkt aus den Gleichungen, was dann jeweils ein „echter“ Beweis für die anschauliche Feststellung ist.

Lösung 4. Zunächst einmal: Wie in der Aufgabenstellung angegeben, bezeichnet eine *Gewinnstellung* eine Stellung, in der der Spieler einen Sieg erzwingen kann, der an der Reihe ist. Die Gewinnstellungen sind also genau die Stellungen, bei denen das Spiel bei optimaler Spielweise des ziehenden Spielers nach einer ungeraden Anzahl von Zügen beendet ist. Jeder Zug aus einer Verluststellung führt in eine Gewinnstellung, und aus jeder Gewinnstellung gibt es einen Zug in eine Verluststellung.

Offensichtlich sind in diesem Sinn $[0, 0, 0]$ und $[0, 1, 1]$ Verluststellungen.

(a) Die Stellung $[1, 7, 13]$ ist eine Gewinnstellung:

Wenn „ich“ sie bekomme, kann ich sie zu $[1, 4, 13]$, einer Verluststellung, reduzieren; die beiden äußeren Haufen haben jetzt denselben Viererrest, der mittlere Haufen hat den Viererrest 0.

Mein Spielpartner kann jetzt den mittleren Haufen reduzieren – dann reduziere ich denselben Haufen in meinem nächsten Zug auf Null, und die beiden äußeren Haufen behalten denselben Viererrest.

Er kann auch einen der äußeren Haufen reduzieren. Falls dieser Haufen aus noch mindestens 4 Bohnen bestand, dann kann ich denselben Haufen weiter reduzieren, so dass anschließend wieder beide äußeren Haufen denselben Viererrest haben. Falls der reduzierte Haufen vorher weniger als 4 Bohnen enthielt, dann kann ich den anderen äußeren Haufen um die gleich Anzahl an Bohnen vermindern und danach haben wieder die beiden äußeren Haufen denselben Viererrest.

Dies kann so fortgesetzt werden, bis alle Haufen leer sind.

(b) Die Stellung $[5, 10, 15]$ ist hingegen eine Verluststellung: Sie weist die Viererreste $[1, 2, 3]$ auf. Wenn „ich" sie bekomme, habe ich zwei Möglichkeiten: Ich kann einen dieser Viererreste auf Null reduzieren, dann kann mein Spielpartner im nächsten Zug die beiden anderen Reste gleich machen und so eine der aus Teil (a) bekannten Verluststellungen erreichen. Alternativ kann ich nur zwei Reste gleich machen, dann kann mein Partner im nächsten Zug den dritten Rest auf Null bringen und somit ebenfalls eine der aus Teil (a) bekannten Verluststellungen erreichen.

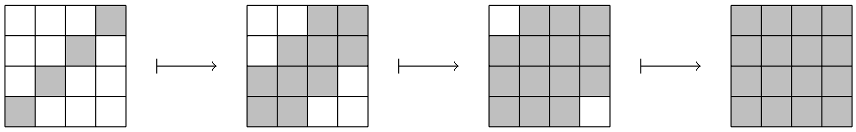
(c) In Teil (a) und (b) haben wir gesehen, dass die Stellungen Verluststellungen sind, bei denen zwei Haufen denselben Viererrest aufweisen und der dritte den Viererrest Null hat oder bei denen alle von Null verschiedenen Viererreste auftreten. Wir zeigen nun darüber hinaus, dass alle anderen Stellungen Gewinnstellungen sind.

Sei also eine Stellung $[a, b, c]$ gegeben, von der wir zeigen wollen, dass sie eine Gewinnstellung ist. Ist keine der Zahlen durch 4 teilbar, müssen zwei von ihnen den gleichen Viererrest haben, da ansonsten eine Verluststellung vorläge. In diesem Fall kann man also den dritten Haufen auf eine durch 4 teilbare Größe reduzieren und so eine Verluststellung herstellen.

Ist umgekehrt eine der Zahlen durch 4 teilbar, dann haben die beiden anderen Zahlen unterschiedliche Viererreste. In diesem Fall kann man den größeren dieser beiden Haufen so reduzieren, dass er den gleichen Viererrest wie der andere Haufen aufweist. Es gibt also auch hier einen Zug in eine Verluststellung.

Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. (a) Eine Möglichkeit ist die folgende. (Es gibt noch etliche weitere.)



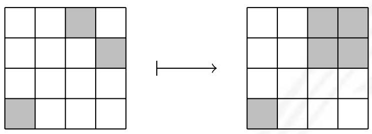
(b) Diese Aufgabe wird durch den Zusatzteil gelöst. Alternativ kann man wie folgt argumentieren.

Betrachtet man eine der beiden äußeren Zeilen, dann hat jede Zelle darin nur einen Nachbarn außerhalb dieser Zeile. Sind also alle Zellen in dieser Zeile gesund, bleiben sie es auch im nächsten Schritt. Daher könnte nie das ganze Feld infiziert werden. Somit muss in jeder der beiden äußeren Zeilen (und analog in beiden äußeren Spalten) mindestens eine Zelle zu Anfang infiziert sein, damit schlussendlich das gesamte Feld infiziert wird.

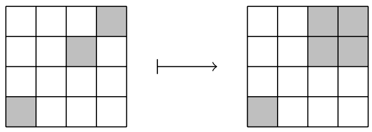
Auch wenn wir zwei benachbarte Zeilen (oder zwei Spalten) betrachten, gilt das gleiche: Jede Zelle hat nur einen Nachbarn außerhalb der beiden Zeilen und daher muss bereits am Anfang eine Zelle in ihnen infiziert sein.

Nehmen wir an, wir hätten nur drei infizierte Zellen, welche das gesamte Feld infizieren. Da es insgesamt vier Randzeilen und -spalten gibt, muss mindestens eine der drei Zellen eine Randzeile und gleichzeitig eine Randspalte abdecken, also in einer Ecke liegen. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass die linke untere Ecke infiziert ist. Wir betrachten nun zwei Fälle: Die rechte obere Ecke ist entweder gesund oder infiziert.

Ist sie gesund, dann ist eine Zelle in der oberen Zeile und eine andere Zelle in der rechten Spalte infiziert. Sind diese beiden Zellen nicht diagonal benachbart, dann hat keine Zelle zwei infizierte Nachbarn und alle gesunden Zellen bleiben gesund. Daher müssen die infizierten Zellen diagonal benachbart sein. In diesem Fall werden aber nur zwei weitere Zellen infiziert:



Wir können also annehmen, dass die rechte obere Ecke infiziert ist. Liegt die letzte infizierte Zelle am Rand des Feldes, sind zwei mittlere Zeilen oder Spalten komplett gesund. Da wir dies bereits ausgeschlossen haben, muss die letzte infizierte Zelle eine der mittleren vier Zellen des Feldes sein. Außerdem muss sie diagonal zu einer der beiden infizierten Ecken benachbart sein, da ansonsten keine weiteren Zellen infiziert werden. Aber auch in diesem Fall werden nur zwei weitere Zellen infiziert:



Daher reichen drei Zellen nicht aus, um das gesamte Feld zu infizieren.

(c) Wie in Teil (a) kann man die Zellen einer Hauptdiagonalen nehmen. Diese infizieren im nächsten Schritt alle Zellen auf den benachbarten Nebendiagonalen, welche danach die Zellen auf den hierzu benachbarten Nebendiagonalen infizieren und so weiter. Nach $n-1$ Schritten ist das gesamte Feld infiziert.

(d) Wie in der Lösung zu Teil (b) gezeigt, muss in zwei benachbarten Zeilen stets eine infizierte Zelle liegen. Daher liegen in mindestens der Hälfte der Zeilen infizierte Zellen und es sind insgesamt mindestens $\frac{n}{2}$ Zellen infiziert.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Ist eine beliebige Menge von Zellen infiziert, dann zählen wir alle Kanten, die am Rand der infizierten Fläche liegen, also an genau eine infizierte Zelle grenzen. Die Anzahl dieser Kanten nennen wir *Umfang* der Infektion. Schreitet die Infektion wie in der Aufgabe beschrieben fort, dann wird ihr Umfang nicht größer: Jede neu infizierte Zelle hatte im vorherigen Schritt mindestens zwei infizierte Nachbarn und somit jetzt noch höchstens zwei gesunde Nachbarn. Für jede neu infizierte Zelle kommen also höchstens zwei Kanten im Rand hinzu (die Kanten zu den jetzt noch gesunden Nachbarn), es fallen aber auch mindestens zwei Kanten im Rand weg (die zu den bereits zuvor infizierten Nachbarn). Der Umfang wächst also nicht.

Da der Umfang am Ende – also bei komplett infiziertem Feld – genau $4n$ ist, muss er auch am Anfang mindestens $4n$ gewesen sein. Da jedes infizierte Feld zum Umfang bestenfalls 4 beisteuern kann, sind mindestens n infizierte Felder nötig.

Lösung 2. Für diese Aufgabe muss man sich überlegen, mit welchen n Stöckchenlängen es unmöglich ist, ein n-Eck zu legen. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein Stöckchen mindestens so lang ist wie alle anderen Stöckchen zusammen, da es dann unmöglich ist die Enden des längsten Stöckchens mit den anderen Stöckchen zu verbinden und ein „echtes“ n-Eck zu erhalten.

(a) Zum Beispiel vier Stöckchen mit den Längen 10 cm, 10 cm, 10 cm und 40 cm haben diese Eigenschaft. Es ist unmöglich mit den drei 10 cm Stöckchen die 40 cm des längsten Stöckchens zu überbrücken.

(b) Hier müssen die beiden kürzesten Stöckchen zusammen kürzer sein als das zweitlängste Stöckchen (oder gleichlang, was im Folgenden weggelassen wird), so dass man aus den drei kürzesten Stöckchen kein Dreieck legen kann. Die Längen 10 cm, 20 cm und 40 cm erfüllen zum Beispiel diese Bedingung. Nun muss das längste Stöckchen kürzer sein als die gemeinsame Länge der drei kürzesten Stöckchen, das heißt, das vierte Stöckchen muss kürzer als 70 cm sein. Auf der anderen Seite darf sich aber auch aus dem längsten und zwei der drei kürzesten Stöckchen kein Dreieck legen lassen. Also muss das längste Stöckchen länger sein als die gemeinsame Länge des zweit- und drittlängsten Stöckchen, welche zusammen 60 cm lang sind. Als längste Länge kann man also für dieses Beispiel eine beliebige Länge zwischen 60 cm und 70 cm (zum Beispiel 65 cm) wählen.

(c) Die Lösung für Teil (b) lässt sich wie folgt verallgemeinern. Die ersten 100 Stöckchenlängen wählen wir so, dass für jedes $\ell = 1, \ldots, 100$ das ℓ-te Stöckchen länger ist als die $\ell - 1$ vorherigen Stöckchen zusammen. Wir können zum Beispiel die zwei kürzesten Längen beliebig wählen und dann wählen wir die dritte Länge als die Summe der ersten beiden plus eins, die vierte Länge als die Summe der ersten drei plus eins usw. Eine explizite Längenfolge die zum Beispiel dieselbe Eigenschaft erreicht, erhält man, indem man dem ℓ-ten Stöckchen eine Länge von 2^ℓ cm zuordnet. Dann erhält man die Längen

$$2\,\text{cm},\ 4\,\text{cm},\ 8\,\text{cm},\ 16\,\text{cm},\ \ldots,\ 2^{100}\,\text{cm}.$$

Die Länge des längsten Stöckchens wählt man nun kürzer als die Gesamtlänge der ersten 100 Stöckchen (so dass sich ein 101-Eck legen lässt), aber länger als diese Gesamtlänge minus der Länge des kürzesten Stöckchens. Für die angegebenen Längen können wir zum Beispiel

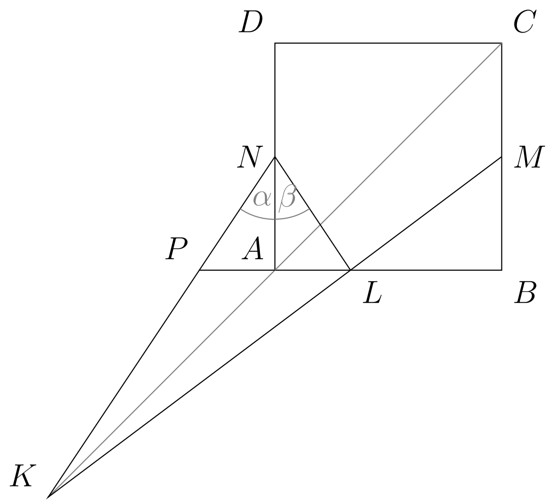
$$(2-1)\,\text{cm} + 4\,\text{cm} + 8\,\text{cm} + 16\,\text{cm} + \cdots + 2^{100}\,\text{cm} = (2^{101} - 3)\,\text{cm}$$

auswählen.

Ein 101-Eck lässt sich nun offensichtlich legen. Sei k mit $3 \leq k \leq 100$ beliebig und seien k Stöckchen beliebig gewählt. Wir müssen zeigen, dass sich aus den Stöckchen kein k-Eck bilden lässt.

Sei x die Länge des längsten der k gewählten Stöckchen. Falls das längste Stöckchen in der Auswahl war (in unserem Beispiel also $x = (2^{101} - 3)\,\text{cm}$), dann lässt sich kein k-Eck legen, da $k < 101$ und nur die Summe aller anderen 100 Stöckchen länger als die Länge des längsten Stöckchens ist. Falls das längste Stöckchen aber nicht dabei ist, dann ist x wegen der angegeben Konstruktion länger als die Gesamtlänge aller kürzeren Stöckchen und insbesondere länger als die Gesamtlänge der anderen $k-1$ gewählten Stöckchen. Somit kann man auch in diesem Fall kein k-Eck legen.

Lösung 3. Es sei P der Schnittpunkt von AB und KN, siehe auch folgende Zeichnung:



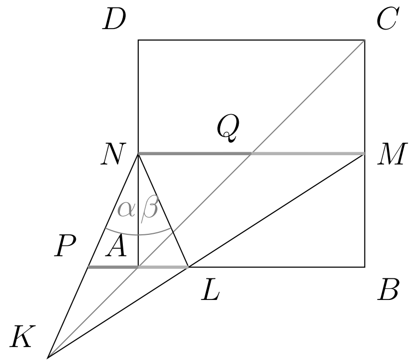
Um $\angle KNA = \angle PNA = \angle ANL$ nachzuweisen, wird $|PA| = |AL|$ gezeigt, da die rechtwinkligen Dreiecke ΔPAN und ΔLAN dann ähnlich sind.

(a) Ohne Einschränkung sei $A = (1,1)$, $B = (2,1)$, $C = (2,2)$ und folglich $D = (1,2)$, $K = (0,0)$, $M = (2,3/2)$ und $N = (1,3/2)$. Es werden nun L und P bestimmt:

Da L und M auf einer Geraden durch den Ursprung liegen, ist $L = sM$. Wegen $L = (L_x, 1) = s(2,3/2)$ ist $s = \frac{2}{3}$, also $L = (4/3, 1)$. Analog ist $P = (P_x, 1) = tN = t(1,3/2)$, also $t = \frac{2}{3}$ und folglich $P = (2/3, 1)$.

Da $|PA| = \frac{1}{3} = |AL|$ ist auch $\angle KNA = \angle PNA = \angle ANL$.

(b) Es sei Q der Schnittpunkt von MN und AC. Da M und N Mittelpunkte gegenüberliegender Quadratseiten sind und AC Diagonale des Quadrats, ist Q der Mittelpunkt des Quadrats und somit auch von MN. Siehe auch folgende Zeichnung:



Da M und N Mittelpunkte der Quadratseiten BC bzw. AD sind ist NM parallel zu AB und damit auch zu PL, da P und L auf der Geraden AB definiert wurden. Es kann also der Dreistrahlsatz („dritte“ Strahlensatz) auf die Strahlen KN, KQ und KM und die parallelen PL und NM angewendet werden:

$$\frac{|NQ|}{|QM|} = \frac{|PA|}{|AL|}$$

Der Punkt A ist also Mittelpunkt von PL, da Q Mittelpunkt von NM ist:

$$|NQ| = |QM| \Rightarrow |PA| = |AL|$$

Also ist auch $\angle KNA = \angle PNA = \angle ANL$.

Bemerkung: Der Dreistrahlsatz ist eine direkte Konsequenz des Strahlensatzes zweimal angewandt, jeweils auf ein Paar der drei Strahlen:

$$\frac{|NQ|}{|KQ|} = \frac{|PA|}{|KA|} \text{ und } \frac{|MQ|}{|KQ|} = \frac{|LA|}{|KA|} \Rightarrow \frac{|NQ|}{|PA|} = \frac{|KQ|}{|KA|} = \frac{|MQ|}{|LA|}$$

Lösung 4. Allgemein bemerkt man, dass eine n-stellige Zahl nur dann mit den letzten n Ziffern ihres Quadrats übereinstimmen kann, wenn schon für jedes $k \leq n$ die letzten k Ziffern der Zahl mit den letzten k Ziffern des Quadrats übereinstimmen.

(a) Die einstelligen Zahlen mit der Eigenschaft sind 0, 1, 5 und 6. Man kann die 40 zweistelligen Zahlen mit diesen Endziffern überprüfen und erhält 00, 01, 25 und 76. (Der Beweis, dass es keine weiteren gibt, erfolgt durch die Angabe der Quadrate oder durch den allgemeinen, letzten Teil.)

(b) Aufgabenteil (a) legt die Vermutung nahe, dass man aus jeder $n-1$-stelligen Zahl mit der Eigenschaft genau eine n-stellige durch Voranstellen einer Ziffer bilden kann. Die 0 und die 1 hat man für jede Anzahl an Stellen. Zu 25 findet man die dreistellige Zahl 625 mit $625^2 = 390625$, weshalb 0625 auch schon eine vierstellige Zahl mit der Eigenschaft ist. Zu 76 findet man 376 mit $376^2 = 141376$. Zu 376 findet man 9376 mit $9376^2 = 87909376$.

Wir müssen nun noch zeigen, dass es höchstens vier drei- bzw. vierstellige Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt. Wir geben einen Beweis für dreistellige Zahlen an, der aber für beliebige n-stellige Zahlen verallgemeinert werden kann (siehe alternativer Beweis im letzten Teil).

Sei also a eine dreistellige Zahl mit der gesuchten Eigenschaft. Dann hat $a^2 - a$ am Ende drei Nullen, das heißt $1000 = 2^3 5^3$ teilt $a^2 - a = a(a-1)$, geschrieben $2^3 5^3 \big| a(a-1)$. Da a und $a - 1$ teilerfremd sind muss einer der folgenden vier Fälle gelten

i. $2^3 5^3 \big| a$,
ii. $2^3 5^3 \big| a - 1$,
iii. $2^3 \big| a - 1$ und $5^3 \big| a$,
iv. $2^3 \big| a$ und $5^3 \big| a - 1$.

Da 000 die einzige dreistellige Zahl ist, die durch 1000 teilbar ist, gibt es in den Fällen i und ii genau eine Zahl a, die die entsprechenden Eigenschaften erfüllt (nämlich $a = 0$ und $a = 1$).

Es bleibt zu zeigen, dass es jeweils höchstens eine dreistellige Zahl a gibt, die die Fälle iii und iv erfüllt. Wir beschränken uns hier auf den Fall iv, da im Fall iii analog argumentiert werden kann. Angenommen die dreistelligen Zahlen a und b erfüllen

$$\begin{array}{ccc} 2^3 \big| a & \text{und} & 5^3 \big| a - 1 \\ 2^3 \big| b & \text{und} & 5^3 \big| b - 1\,. \end{array}$$

Dann teilt 2^3 auch $a - b$ und 5^3 auch $(a - 1) - (b - 1) = a - b$. Also ist $2^3 5^3 = 1000$ ein Teiler von $|a - b|$. Da aber a und b dreistellige Zahlen sind, ist auch $|a - b|$ eine dreistellige Zahl. Wie bereits bemerkt ist 000 die einzige dreistellige Zahl, die durch 1000 teilbar ist. Also ist $a - b = 0$ und damit $a = b$. Das heißt, es gibt höchstens eine dreistellige Zahl die die Eigenschaften aus Fall iv erfüllt.

Alternativ kann man (wie im ersten Teil) jeweils 40 Quadrate angeben, um zu zeigen, dass es keine weiteren drei- bzw. vierstelligen Zahlen gibt.

(c) Es soll allgemein gezeigt werden, dass es für jedes n genau vier n-stellige Zahlen mit der Eigenschaft gibt. Im ersten Aufgabenteil wurde dies bereits für $n = 1$ (Verankerung) gezeigt, für jedes größere n wird (induktiv) gezeigt:

Hat man eine $n-1$-stellige Zahl mit der Eigenschaft und stellt eine Ziffer voran, so hat genau eine der zehn möglichen Zahlen wieder die Eigenschaft.

Sei also $n > 2$, sei a eine $n-1$-stellige Zahl mit der Eigenschaft und z eine Ziffer. Schreiben wir z vor a, so erhalten wir die Zahl $b := 10^{n-1} \cdot z + a$. Nun ist

$$b^2 = (10^{n-1} \cdot z + a)^2 = 10^{2n-2} \cdot z^2 + 2 \cdot 10^{n-1} \cdot z \cdot a + a^2.$$

Der erste Summand hat keinerlei Einfluss auf die letzten n Ziffern, da er auf $2n-2 > n$ Nullen endet. Der zweite Summand hat Einfluss auf die n-te Ziffer von hinten, aber nicht auf die letzten $n-1$ Ziffern, denn er endet auf $n-1$ Nullen. Da a die gewünschte Eigenschaft hat, stimmen die letzten $n-1$ Ziffern von b^2 mit denen von b überein, es bleibt nur die n-te Ziffer von hinten zu überprüfen.

Bezeichnet c die n-te Ziffer von hinten von a^2, dann ist die n-te Ziffer von hinten von b^2 gleich der letzten Ziffer von $2za + c$. Demnach hat b genau dann die gewünschte Eigenschaft, wenn diese letzte Ziffer z ist, also wenn $2za + c - z$ durch 10 teilbar ist. Im ersten Aufgabenteil haben wir gesehen, dass die letzte Ziffer von a eine 0, 1, 5 oder 6 ist. Ist sie eine 0 oder 5, dann ist $2za$ durch 10 teilbar und somit ist $2za + c - z$ genau dann durch 10 teilbar, wenn $c - z$ es ist. In diesem Fall erfüllt b also genau dann die Eigenschaft, wenn $z = c$ ist.

Ist die letzte Ziffer von a eine 1 oder 6, dann ist $2z(a-1)$ durch 10 teilbar. Somit ist $2za + c - z$ genau dann durch 10 teilbar, wenn $2z + c - z = z + c$ es ist. Hier hat b also genau dann die Eigenschaft, wenn $z = c = 0$ ist oder $c \neq 0$ und $z = 10 - c$.

Somit ist gezeigt, dass es stets genau eine Ziffer z gibt, welche durch Voranstellen aus a eine n-stellige Zahl b mit der gewünschten Eigenschaft macht.

Alternativer Beweis: Sei a eine n-stellige Zahl mit der gesuchten Eigenschaft. Dann hat $a^2 - a$ am Ende n Nullen, das heißt, 10^n teilt $a^2 - a$, geschrieben $10^n \big| (a^2 - a)$. Da $a^2 - a$ sich als $a(a-1)$ schreiben lässt und $10^n = 2^n 5^n$, gilt also

$$2^n 5^n \big| a(a-1).$$

Da a und $a-1$ teilerfremd sind, folgt, dass eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt sein muss:

i. $2^n 5^n \big| a$,

ii. $2^n 5^n \big| a - 1$,

iii. $2^n \big| a - 1$ und $5^n \big| a$,

iv. $2^n \big| a$ und $5^n \big| a-1$.

Wir zeigen, dass es für jeden dieser Fälle genau ein mögliches a gibt.

Da $a-1 < a < 10^n$ ist und 0 die einzige durch 10^n teilbare natürliche Zahl kleiner 10^n ist, folgt in den Fällen i und ii, dass $a = 0$ bzw. $a = 1$ sein muss.

Im Folgenden wird gezeigt, dass es genau eine n-stellige Zahl a gibt mit $5^n \big| a$ und $2^n \big| a-1$, Fall iv geht analog.

Es gibt 2^n n-stellige a mit $5^n \big| a$: $0 \cdot 5^n$, $1 \cdot 5^n$, …, $(2^n - 1) \cdot 5^n$, da $2^n \cdot 5^n = 10^n$ schon $n+1$-stellig ist. Betrachtet man die Reste dieser 2^n Zahlen bei der Teilung durch 2^n, so kommt jeder mögliche Rest 0, 1, …, $2^n - 1$ genau einmal vor (der Beweis wird im nächsten Absatz kurz angegeben). Genau dann, wenn der Rest 1 bei der Teilung von a durch 2^n herauskommt, gilt $2^n \big| a-1$. Es gibt also genau eine Zahl mit der Eigenschaft.

Beweis, dass für teilerfremde k und b unter $0 \cdot b$, $1 \cdot b$, …, $(k-1) \cdot b$ jeder Rest bei der Teilung durch k genau einmal vorkommt: Angenommen, ein Rest $r < k$ käme doppelt vor, also $l_1 \cdot b$ und $l_2 \cdot b$ ließen denselben Rest bei der Teilung durch k für $l_1 \neq l_2$ mit $l_1, l_2 \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Dann teilt k auch $l_1 \cdot b - l_2 \cdot b = (l_1 - l_2) \cdot b$. Da k und b teilerfremd sind, muss dann $k \big| l_1 - l_2$ gelten. Weil aber $l_1, l_2 < k$ gilt, kann dies nur für $l_1 - l_2 = 0$ der Fall sein, was für $l_1 \neq l_2$ ausgeschlossen ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass kein Rest doppelt vorkommen kann. Kommt unter den Resten der k Zahlen keiner doppelt vor, muss jeder der k möglichen Reste genau einmal auftreten.