M Mittelstufe

Aufgabe 1 (4 P.)**.** Wir sagen, dass ein Kreis ein Viereck *ordentlich* schneidet, wenn es jede Vierecksseite in genau zwei Punkten schneidet. Trifft es zu, dass es zu jedem konvexen Viereck einen Kreis gibt, der dieses ordentlich schneidet?

(Eine Menge ist genau dann konvex, wenn die Verbindungsstrecke von je zwei beliebigen Punkten der Menge vollständig in der Menge liegt.)

Aufgabe 2 (7 P.)**.** Wir nennen ein Paar (a, b) unterschiedlicher positiver ganzer Zahlen *nett*, wenn sowohl deren arithmetisches Mittel $\frac{a+b}{2}$ als auch deren geometrisches Mittel $\sqrt{ab}$ ganze Zahlen sind. Trifft es zu, dass es zu jedem netten Paar ein weiteres nettes Paar mit dem gleichen arithmetischen Mittel gibt?

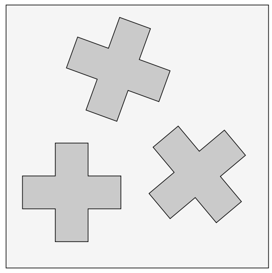
(Die Paare (a, b) und (b, a) sollen hier als dasselbe Paar angesehen werden.)

Aufgabe 3. Alice und Bob spielen das folgende Spiel. In jedem Zug schlägt Alice eine ganze Zahl vor und Bob schreibt entweder diese Zahl auf oder die Summe dieser Zahl und aller vorher aufgeschriebenen Zahlen. Ist es immer möglich, dass Alice dafür sorgen kann, dass zu irgendeinem Zeitpunkt unter den Zahlen

(a) (3 P.) mindestens 100-mal die Zahl 5 vorkommt bzw.

(b) (4 P.) mindestens 100-mal die Zahl 10 vorkommt?

Aufgabe 4 (7 P.)**.** Das X-Pentomino besteht aus fünf 1×1-Quadraten, von denen vier jeweils seitlich an das fünfte angrenzen. Ist es möglich, neun solche Pentominos aus einen 8×8-Schachbrett auszuschneiden, wobei nicht unbedingt entlang der Gitterlinien geschnitten werden muss.
(Die Abbildung zeigt, wie man drei solche X-Pentominos ausschneiden kann.)



Aufgabe 5 (8 P.)**.** Gibt es 100 positive ganze Zahlen, so dass die dritte Potenz einer der Zahlen gleich der Summe der dritten Potenzen aller anderen Zahlen ist?

Aufgabe 6 (10 P.)**.** Es gibt zwei runde Tische, an denen jeweils n Zwerge sitzen. Jeder Zwerg hat nur zwei Freunde: seinen linken und seinen rechten Nachbarn. Ein guter Zauberer will alle Zwerge an einen runden Tisch setzen, so dass zwei Nachbarn immer Freunde sind. Sein Zauber ermöglicht es ihm, beliebige $2n$ Paare von Zwergen in Paare von Freunden zu verwandeln. Allerdings weiß er, dass ein böser Hexer n dieser neuen Freundschaften aufbrechen kann. Für welches n kann der gute Zauberer sein Ziel unabhängig davon erreichen, was der böse Hexer tut?

Aufgabe 7. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, so dass keine drei seiner Seiten ein Dreieck bilden können. Beweise,

(a) (6 P.) dass einer der Viereckswinkel nicht größer als $60°$ ist und

(b) (6 P.) dass einer der Viereckswinkel mindestens $120°$ beträgt.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!