41. Internationaler Städtewettbewerb Mathematik — 17. Februar 2020
Frühjahrsrunde — Hamburg

M Mittelstufe

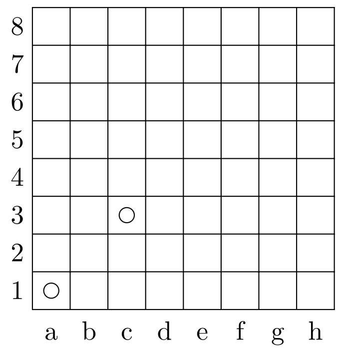
Aufgabe 1 (4 P.)**.** Die Quadrumland-Karte ist ein 6×6-Quadrat, in dem jede quadratische Zelle entweder ein Königreich oder umstrittenes Gebiet ist. Es gibt 27 Königreiche und 9 umstrittene Gebiete. Jedes umstrittene Gebiet wird genau von den Königreichen beansprucht, die benachbart sind, also über eine Kante oder Ecke mit dem jeweiligen Gebiet verbunden sind. Ist es möglich, dass für jedes umstrittene Gebiet die Anzahl der Ansprüche (auf das jeweilige Gebiet) anders ist als bei allen anderen umstrittenen Gebieten?

Aufgabe 2 (4 P.)**.** Was ist die größtmögliche Anzahl an unterschiedlichen ganzen Zahlen in einer Reihe, so dass jeweils die Summe von 11 aufeinanderfolgenden Zahlen entweder 100 oder 101 ist?

Aufgabe 3 (4 P.)**.** Sei $ABCD$ ein Rhombus und $APQC$ ein Parallelogramm, für das der Punkt B im Inneren liegt und die Seite AP gleichlang wie eine Seite des Rhombus ist. Beweise, dass B der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\triangle DPQ$ sein muss.

Aufgabe 4 (5 P.)**.** Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = n$ habe für eine ganze Zahl n eine ganzzahlige Lösung x, y, z (alle Zahlen sind ganze Zahlen). Beweise, dass dann die Gleichung $x^2 + y^2 - xy = n$ ebenfalls eine ganzzahlige Lösung x, y hat.

Aufgabe 5 (5 P.)**.** Auf einem 8×8-Schachbrett stehen zwei gleiche Steine auf den Feldern a1 und c3. Alice und Bob ziehen abwechselnd auf folgende Weise (wobei Alice beginnt): Ein Spieler wählt einen Stein und bewegt ihn beliebig viele Felder horizontal nach rechts oder vertikal nach oben. Das Ziel jedes Spielers ist es, das Feld h8 zu erreichen. Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie, unabhängig davon, was der Gegner macht? (Zu jeder Zeit darf es nur einen Stein auf einem Feld geben und die Steine dürfen sich nicht überspringen.)



Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. — Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.)**.** Ist es möglich, eine 40×41-Tabelle so mit ganzen Zahlen zu füllen, dass jede Zahl gleich der Anzahl an (über eine Kante) benachbarten Zellen mit derselben Zahl ist?

Aufgabe 2 (4 P.)**.** Alice stellt nach ihrem kürzlichen Besuch in Addis Abeba fest, dass sie nun Neujahr in jeder möglichen Halbkugel der Erde außer einer verbracht hat. Was ist die minimale Anzahl an Orten, an denen Alice Neujahr verbracht hat? *Anmerkung:* Wir zählen Orte, an denen Neujahr verbracht wird, als Punkte auf der Kugel. Ein Punkt auf dem Rand einer Halbkugel liegt nicht innerhalb dieser Halbkugel.

Aufgabe 3 (5 P.)**.** Es seien 41 Buchstaben auf einem Kreis, jeder davon sei A oder B. Es ist erlaubt, jeweils ABA durch B zu ersetzen oder umgekehrt sowie BAB durch A zu ersetzen und ebenfalls umgekehrt. Trifft es in jedem Fall zu, dass es möglich ist, einen Kreis mit nur einem einzigen Buchstaben zu erhalten, indem man diese Operationen einige Male anwendet?

Aufgabe 4. Wir nennen ein nichtkonstantes Polynom $p(x)$ mit reellen Koeffizienten *aufgeteilt in zwei Quadrate*, wenn es als $a(x) + b(x)$ dargestellt werden kann, wobei $a(x)$ und $b(x)$ jeweils Quadrate von Polynomen mit reellen Koeffizienten sind. Gibt es so ein Polynom $p(x)$, das in zwei Quadrate aufgeteilt werden kann auf

(a) (2 P.) genau eine Weise bzw.

(b) (3 P.) genau zwei Weisen?

Anmerkung: Zwei Aufteilungen, die sich nur in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden, werden als gleich betrachtet.

Aufgabe 5 (5 P.)**.** Gegeben seien zwei Kreise, die sich in den Punkten P und Q schneiden. Betrachte eine beliebige Gerade ℓ durch Q und seien A und B die jeweils zweiten Schnittpunkte dieser Linie mit den Kreisen. Sei C der Schnittpunkt der Tangenten der jeweiligen Kreise in den beiden Punkten (A und B). Sei D der Schnittpunkt der Geraden AB mit der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle CPQ$. Beweise, dass alle möglichen D für eine Wahl von ℓ auf einem Kreis liegen.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!