O Oberstufe

Aufgabe 1 (5 P.). Von 100 Jungen hat jeder 100 Kekse auf seinem Teller. Anstatt sie zu essen, spielen die Jungen ein Spiel: In jedem Schritt wählt ein Junge eine Gruppe aus (die aus mindestens einem Jungen besteht) und gibt jeweils einen Keks von seinem Teller an jeden Jungen der Gruppe. Was ist die kleinste Anzahl an Schritten, die notwendig ist, um die Anzahl an Keksen für alle Jungen verschieden zu machen?

Aufgabe 2 (5 P.). In jeder Zelle eines 8×8-Feldes steht eine natürlich Zahl. Bei jeder Zerlegung des Feldes in Steine aus zwei sich an einer Seite berührenden Feldern (also 1×2 oder 2×1) ist die Summe der Zahlen für jeden Stein verschieden. Ist es möglich, dass die größte Zahl des Feldes nicht größer ist als 32?

Aufgabe 3 (7 P.). Ein Viereck $ABCD$ sei einbeschrieben in einen Kreis mit Mittelpunkt O, der nicht auf einer Diagonalen des Vierecks liegt. Der Kreis durch A, O und C enthalte den Mittelpunkt der Strecke BD. Beweise, dass der Kreis durch B, O und D den Mittelpunkt der Strecke AC enthält.

Aufgabe 4 (8 P.). Paarweise verschiedene positive Zahlen sind auf 2016 rote und 2016 blaue Karten geschrieben. Auf den Karten der einen Farbe stehen die Summen aller möglichen Paare aus 64 bestimmten Zahlen, auf den Karten der anderen Farbe stehen die Produkte derselben Paare. Ist es immer möglich, die Farbe der Karten zu bestimmen, auf denen die Summen stehen?

Aufgabe 5 (9 P.). Ist es möglich, ein 1×1-Quadrat so in zwei Teile zu zerschneiden, dass diese eine Kreisscheibe mit Durchmesser größer als 1 überdecken können?

Aufgabe 6 (9 P.). Alice und Bob spielen das folgende Spiel: Alice wählt ein Polynom $P(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten. In jedem Zug zahlt Bob 1 Dollar an Alice und nennt ihr eine ganze Zahl a. Dabei kann er dieselbe Zahl a nicht zweimal wählen. Alice antwortet mit der Anzahl an ganzzahligen Lösungen der Gleichung $P(x) = a$. Bob gewinnt, wenn Alice eine Zahl zum zweiten Mal als Antwort nennen muss (nicht notwendigerweise in direkt aufeinanderfolgenden Zügen). Ermittle die minimale Geldmenge, die es Bob unabhängig von der Wahl des Polynoms durch Alice ermöglicht, das Spiel zu gewinnen.

Aufgabe 7 (12 P.). Eine endliche Anzahl an Fröschen sitzen auf paarweise verschiedenen ganzzahligen Punkten der reellen Geraden. In jedem Zug springt ein Frosch um 1 nach rechts, so dass wieder alle Frösche auf paarweise verschiedenen Punkten sitzen. Für eine Anfangsstellung können die Frösche n Züge auf genau m verschiedene Weisen machen. Beweise, dass sie ebenfalls n Züge auf genau m verschiedene Weisen machen können, wenn sie jeweils um 1 nach links (statt nach rechts) springen.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!