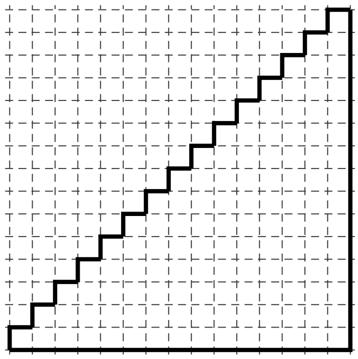
M Mittelstufe

Aufgabe 1 (3 P.)**.** Ist es möglich, die Seiten eines Würfels so mit drei Farben anzumalen, dass jede Farbe vorkommt, man aber von jedem Punkt höchstens zwei Farben sehen kann? (Von jedem Punkt kann man nur Seiten sehen, die alle eine gemeinsame Ecke haben.)

Aufgabe 2 (4 P.)**.** Die Punkte K und L liegen so auf der Seite AB eines Dreiecks $\triangle ABC$, dass $|KL| = |BC|$ und $|AK| = |LB|$ gilt. Ferner sei M der Mittelpunkt der Seite AC. Beweise, dass $\angle KML = 90°$.

Aufgabe 3 (4 P.)**.** Pete addiert 10 aufeinanderfolgende Zweierpotenzen beginnend mit einer beliebigen, während Basil mehrere aufeinanderfolgende natürliche Zahlen beginnend mit der 1 aufsummiert. Können beide dasselbe Ergebnis erhalten?

Aufgabe 4 (4 P.)**.** Eine 15-stufige Treppe mit senkrechter und waagerechter Basis sei in ein Gitter eingezeichnet (siehe Abbildung). Welches ist die kleinste Anzahl an Quadraten, in die man die Treppe aufteilen kann. (Die Aufteilung darf nur entlang der Gitterlinien erfolgen.)



Aufgabe 5 (5 P.)**.** Es seien $2n+1$ ganze Zahlen gegeben: einmal die 0 und je zweimal jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Für welche Zahlen n kann man die $2n+1$ Zahlen so anordnen, dass für jedes $m = 1, \ldots, n$ jeweils genau m Zahlen zwischen den zwei Zahlen m stehen?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. — Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Pete addiert 100 aufeinanderfolgende Zweierpotenzen beginnend mit einer beliebigen, während Basil mehrere aufeinanderfolgende natürliche Zahlen beginnend mit der 1 aufsummiert. Können beide dasselbe Ergebnis erhalten?

Aufgabe 2 (4 P.). Eine Motte hat vier kleine Löcher in einen quadratischen Teppich mit Kantenlänge 275 cm gefressen. Kann man immer ein quadratisches Stück mit 1 m Kantenlänge ohne Loch ausschneiden? (Betrachte jedes Loch als Punkt.)

Aufgabe 3 (4 P.). Es seien $2n+1$ ganze Zahlen gegeben: einmal die 0 und je zweimal jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Für welche Zahlen n kann man die $2n+1$ Zahlen so anordnen, dass für jedes $m = 1, \ldots, n$ jeweils genau m Zahlen zwischen den zwei Zahlen m stehen?

Aufgabe 4 (5 P.). Im Dreieck $\triangle ABC$ werde die Seitenhalbierende AM durch die Punkte K und L gedrittelt, es gelte also $|AK| = |KL| = |LM| = \frac{1}{3}|AM|$. Der Punkt P sei so gewählt, dass die Dreiecke $\triangle KPL$ und $\triangle ABC$ ähnlich sind ($\frac{|KP|}{|AB|} = \frac{|PL|}{|BC|} = \frac{|KL|}{|AC|}$) und dass P und C auf derselben Seite der Geraden AM liegen. Beweise, dass P auf der Geraden AC liegt.

Aufgabe 5 (5 P.). 2015 positive ganze Zahlen seien so im Kreis angeordnet, dass die Differenz zweier benachbarter Zahlen jeweils mit derem größten gemeinsamen Teiler (ggT) übereinstimmt. Ermittle die größte Zahl N, die in jedem Fall ein Teiler des Produktes dieser 2015 Zahlen sein muss.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!