

O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.). Inspector Gadget hat 36 Steine mit den Massen 1 Gramm, 2 Gramm, \dots , 36 Gramm. Doctor Claw hat einen Superkleber, von dem ein Tropfen zwei Steine zu einem Stein zusammenkleben kann (also zwei Tropfen kleben drei Steine zusammen usw.). Doctor Claw möchte einige Steine so zusammenkleben, dass in der so erhaltenen Menge an Steinen Inspector Gadget nicht mehr einen oder mehrere davon auswählen kann, so dass deren Gesamtmasse genau 37 Gramm beträgt. Finde die kleinste Anzahl an Tropfen, die Doctor Claw benötigt, um dies zu erreichen.

Aufgabe 2 (4 P.). Im konvexen Viereck $ABCD$ stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Die Punkte M und N liegen auf den Seiten AD bzw. CD , so dass die Winkel $\angle NBA$ und $\angle CBM$ beide rechte Winkel sind. Beweise, dass die Geraden AC und MN parallel sind.

Aufgabe 3 (5 P.). Ali Baba und die 40 Räuber wollen den Bosphorus überqueren (die Meerenge zwischen Europa und Kleinasien). Sie haben sich so in einer Reihe aufgestellt, dass jeweils diejenigen, die nebeneinander stehen, auch befreundet sind. Am Anfang steht Ali Baba und der Räuber neben seinem Nachbarn ist ebenfalls Ali Babas Freund. Es gibt nur ein Boot, das nur zwei oder drei Personen tragen kann, die alle befreundet sein müssen. Eine einzelne Person kann nicht allein segeln. Können Ali Baba und die 40 Räuber in jedem Fall die Meerenge überqueren?

Aufgabe 4 (5 P.). Die positiven ganzen Zahlen a , b , c und d seien paarweise teilerfremd und erfüllen die Gleichung

$$ab + cd = ac - 10bd.$$

Beweise, dass man immer drei dieser Zahlen auswählen kann, so dass eine der Zahlen gerade die Summe der beiden anderen ist.

Aufgabe 5 (5 P.). Die Wege eines großen Parks bilden die Seiten und Diagonalen eines konvexen Vierecks $ABCD$. Alex beginnt bei A und wandert entlang AB , BC und CD . Ben wandert entlang AC ; er verlässt A gleichzeitig mit Alex und erreicht C gleichzeitig mit Alex. Chris wandert entlang BD ; er verlässt B zum gleichen Zeitpunkt, als Alex an B vorbeikommt, und erreicht D gleichzeitig mit Alex. Kann es passieren, dass Ben und Chris gleichzeitig den Punkt O erreichen, welcher der Schnittpunkt von AC und BD sei? Die Geschwindigkeit der Wanderer sei jeweils konstant.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg!