27. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 13. April 2006

OBERSTUFE

Aufgabe 1:

Betrachten Sie ein konvexes Polyeder mit genau 100 Kanten. Jede seiner Ecken wird genau durch einen ebenen Schnitt abgetrennt. Dabei schneiden sich die Schnittebenen nicht im Innern und auch nicht auf der Oberfläche des Polyeders. Finden Sie für das sich so ergebende Polyeder heraus,

(a) wie viele Ecken es hat [1 Punkt];

(b) wie viele Kanten es hat [2 Punkte].

Aufgabe 2: [3 Punkte]

Gibt es eine gerade Funktion $p(x)$ und eine weitere Funktion $q(x)$, so dass die Funktion $p(q(x))$ ungerade ist (ohne die Nullfunktion zu sein)? (Dabei heißt eine Funktion $p(x)$ gerade, wenn stets $p(-x) = p(x)$ gilt, und ungerade, wenn stets $p(-x) = -p(x)$ gilt.)

Aufgabe 3: [4 Punkte]

Es sei $a > 0$ so gewählt, dass es genau fünf positive ganze Zahlen x gibt mit $10 < a^x < 100$. Wie viele ganzzahlige positive Lösungen können dann die Ungleichungen $100 < a^x < 1000$ haben? Bestimmen Sie alle Möglichkeiten.

Aufgabe 4: [5 Punkte]

Das Viereck $ABCD$ besitzt einen Umkreis, ferner gilt $|AB| = |AD|$. Der Punkt M liegt auf der Seite BC, während Punkt N auf der Seite CD liegt. Der Winkel $\angle MAN$ ist halb so groß wie der Winkel $\angle BAD$. Zeigen Sie $|MN| = |BM| + |ND|$.

Aufgabe 5:

Peter möchte aus n^3 weißen Würfelchen der Kantenlänge 1 einen großen Würfel der Kantenlänge n bilden. Er möchte es dabei so einrichten, dass alle Außenflächen weiß sind. Wie viele Flächen der Würfelchen muss Vasya mindestens schwarz anmalen, um Peter daran zu hindern?

(a) falls $n = 3$ [3 Punkte];

(b) falls $n = 1000$ [3 Punkte].

Alle Aussagen und Feststellungen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. **Viel Erfolg !**