

## 27. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 13. April 2006

### MITTELSTUFE

#### Aufgabe 1: [3 Punkte]

In dem Dreieck  $ABC$  sei der Winkel bei  $A$   $60^\circ$ . Die Mittelsenkrechte der Seite  $AB$  schneidet die Gerade  $AC$  in  $N$  und die Mittelsenkrechte der Seite  $AC$  schneidet die Gerade  $AB$  in  $M$ . Zeige, dass die Strecken  $MN$  und  $BC$  gleich lang sind.

#### Aufgabe 2: [3 Punkte]

Betrachte eine  $n \times n$ -Tafel. In jedem Feld der ersten Spalte steht die Zahl 1, in jedem der Feld der zweiten Spalte steht die Zahl 2 u.s.w. Dann radiert jemand alle Zahlen auf der Diagonalen von links oben bis nach rechts unten aus. Zeige, dass die Summe der Zahlen oberhalb dieser Diagonalen genau zweimal so groß ist wie die Summe der Zahlen unterhalb dieser Diagonalen.

#### Aufgabe 3: [4 Punkte]

Es sei  $a > 0$  so gewählt, dass es genau drei ganze Zahlen  $x$  gibt mit  $1 < x \cdot a < 2$ . Wie viele ganzzahlige Lösungen können dann die Ungleichungen  $2 < x \cdot a < 3$  haben? Bestimme alle Möglichkeiten.

#### Aufgabe 4:

Drei Kinder – Ann, Borya und Vitya – sitzen an einem runden Tisch, auf dem mehr als drei Nüsse liegen. Zu Anfang hat Ann sämtliche Nüsse. Ist die Anzahl der Nüsse gerade, so verteilt Ann alle Nüsse an Borya und Vitya, wobei jeder (genau) die Hälfte bekommt. Ist die Anzahl ungerade, so isst sie eine Nuss und verteilt den Rest wie oben. Dann ist ihr rechter Nachbar dran, der in analoger Weise verfährt. Dieses Spiel setzen sie reihum immer weiter fort. Beweise, dass

- mindestens eine Nuss gegessen wird [3 Punkte];
- die Kinder niemals alle Nüsse aufessen [3 Punkte].

#### Aufgabe 5:

Peter möchte aus  $n^3$  weißen Würfelchen der Kantenlänge 1 einen großen Würfel der Kantenlänge  $n$  bilden. Er möchte es dabei so einrichten, dass alle sechs Außenflächen vollständig weiß sind. Wie viele Flächen der Würfelchen muss Vasya mindestens schwarz anmalen, um Peter daran zu hindern?

- falls  $n = 2$  [2 Punkte];
- falls  $n = 3$  [4 Punkte].

**Alle Aussagen und Feststellungen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!**

**An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.**

**Zeit: 4 Stunden.**

**Viel Erfolg !**