25- Internationaler Mathematik,Städtewettbewerb, Frühjahr 2004

OBERSTUFE

Aufgabe 1: [4 P.]

An jedem Tag ändert sich der Aktienkurs der „Seifenblasen AG“ um einen festen Prozentsatz $n\%$ (bezogen auf den Vortag) entweder nach oben oder nach unten. Dabei ist n eine ganze Zahl mit $0 < n < 100$. Man denke sich dabei die Kurse beliebig genau berechnet. Kann es sein, dass die Aktienkurse an zwei verschiedenen Tagen exakt übereinstimmen?

Aufgabe 2: [6 P.]

Ein Billiardtisch hat die Gestalt eines Polygons (nicht notwendig konvex, d.h. es sind auch einspringende Ecken erlaubt), wobei zwei benachbarte Kanten stets einen Winkel mit einer ganzzahligen Gradzahl bilden. In jeder Ecke befindet sich ein punktförmiges Loch, in dem die (punktförmige) Billiardkugel verschwindet. In einer Ecke A mit innerem 1° Winkel beginnt nun eine Kugel reibungsfrei zu rollen, wobei sie an den Kanten nach dem Gesetz „Einfallswinkel = Reflexionswinkel“ reflektiert wird. Beweisen Sie, dass die Kugel niemals nach A zurückkehrt.

Aufgabe 3: [6 P.]

Eine Dreieckspyramide wird senkrecht auf eine Ebene so projiziert, dass die Projektion einen maximale Flächeninhalt hat. Zeigen Sie, dass dann diese Ebene entweder zu einer der Pyramidenflächen oder zu zwei sich nicht schneidenden Kanten der Pyramide parallel ist.

Aufgabe 4: [6 P.]

Anfangs steht auf einer Tafel die (riesengroße) Zahl $2004! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 2004$. Zwei Spieler ziehen abwechselnd. Ein Zug besteht darin, von der Zahl an der Tafel eine nicht größere natürliche Zahl abzuziehen, die aber nur von höchstens 20 verschiedenen Primzahlen geteilt wird. Die Differenz wird dann als neue Zahl auf die Tafel geschrieben. Gewinner ist, wer die Zahl 0 erreichen kann. Welcher der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie und wie muss er spielen, um stets zu gewinnen?

Aufgabe 5: [7 P.]

Die Parabel $y = x^2$ und ein Kreis schneiden sich in genau zwei Punkten A und B. Ferner sei A ein Berührpunkt, d.h. in A stimmen die Tangente an die Parabel und die Tangente an den Kreis überein. Müssen sich dann auch die Parabel und der Kreis in B berühren?

Aufgabe 6:

Ein Zauberer hat die Aufgabe, von einem Stapel aus 36 Karten (9 Kreuz, 9 Pik, 9 Herz und 9 Karo) die „Farbe“ (Kreuz, Pik, Herz oder Karo) jeweils der obersten Karte, von der er natürlich nur die Rückseite sieht, vorauszusagen. Nachdem er sich geäußert hat, wird ihm die Karte umgedreht gezeigt und zur Seite gelegt. Die Rückseiten der Karten sind allerdings nicht symmetrisch. Die Karten werden gemischt und von einem eingeweihten Assistenten präpariert, indem er jede Karte zwar verdrehen, sie aber nicht in ihrer Reihenfolge verändern kann. Das System, nach dem die Karten verdreht sind, ist natürlich vorher zwischen dem Zauberer und seinem Assistenten abgesprochen worden. Kann der Zauberer nun

[3 P.] in mehr als der Hälfte der Karten die „Farbe“ richtig bestimmen?

[5 P.] bei nicht weniger als 20 Karten die „Farbe“ richtig bestimmen?

Alle Aussagen sind zu begründen. An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Lineal und Zirkel zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. **Viel Erfolg !**