Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

a) Man bestimme mit Hilfe der Laurent-Reihe die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$f(z) = \frac{4z^3}{z^4 + 4} \,.$$

b) Man berechne folgendes Integral mit Hilfe des Residuensatzes

$$\oint_c \frac{32z}{z^4 - 256} \, dz \,,$$

dabei ist c die im positiven Sinn durchlaufene Ellipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \,.$$

Aufgabe 22:

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 12} \, dx,$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + x}{1 + x^3} \, dx$ und

c) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \, dx \,.$

Aufgabe 23:

Mittels Residuenkalkül berechne man die folgenden Integrale:

a) $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2\varphi}\, d\varphi\,,$$

b) $$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} \qquad (a>1)\,.$$

Hinweis: Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ bzw. $\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$.

Aufgabe 24:

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{für} \quad -1 \le t \le 1\,, \\ 2 & \text{für} \quad 1 < t \le 2\,, \\ 0 & \text{sonst} \quad . \end{cases}$$

a) Man berechne zu f die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ und überprüfe deren Stetigkeit in $\omega = 0$.

b) Man berechne die Inverse-Fouriertransformierte zu

$$F(\omega) = 2i\left(\frac{\omega e^{-2i\omega} - \sin\omega}{\omega^2}\right)$$

unter Verwendung von

$$CHW \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\alpha}}{\omega}\, d\omega \;=\; \begin{cases} \pi i & \text{für} \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{für} \quad \alpha = 0 \\ -\pi i & \text{für} \quad \alpha < 0\,. \end{cases}$$

und ohne das Ergebnis aus a).

Abgabetermin: 4.07.2006 (zu Beginn der Übung)