Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{e^z}{(z+i)^5}dz, \quad c_1 : |z+i| = 1, \quad c_2 : |z-2| = 2$

b) $\displaystyle\oint_{c} \frac{z^2+1}{z^3-z^2+z-1}dz, \quad c : \left|z-\frac{1}{2}\right| = 1,$

c) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{(\sin z)^2}{z^3}dz, \quad c_1 : |z-1| = 0.9, \quad c_2 : |z-1| = 1.1,$

d) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{z+i}{z^2+z-6}dz, \quad c_1 : |z-1| = 2, \quad c_2 : |z+4| = 3,$

e) $\displaystyle\oint_{c} \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) dz, \quad c : |z| = 1,$

f) $\displaystyle\oint_{c} \frac{\cos z}{(z+\pi i)^{2n+1}}dz, \quad c : |z| = 2\pi.$

Aufgabe 18:

Man gebe **alle** Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2-3z}$$

zum Entwicklungspunkt

a) $z_0 = 1$, b) $z_0 = 0$

an. Wo konvergieren die Reihen jeweils?

Aufgabe 19:

Man bestimme die Laurententwicklung der Funktion

$$\text{a)}\quad f(z) \;=\; \frac{\sin z}{z^3} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 0,$$

$$\text{b)}\quad f(z) \;=\; (z+i)\cos\left(\frac{1}{z-\pi}\right) \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = \pi$$

und gebe die Residuen von $f(z)$ in z_0 an.

Aufgabe 20:

Für die folgenden Funktionen

$$\text{a)}\quad f(z) \;=\; \frac{z^2}{z^4-1}, \qquad \text{b)}\quad f(z) \;=\; \frac{\cos z - 1}{z},$$

$$\text{c)}\quad f(z) \;=\; \cos\frac{1}{z}, \qquad \text{d)}\quad f(z) \;=\; \tanh\, z$$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten drei (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z_0 = 0$, die für große z konvergiert.

Abgabetermin: 20.06.2006 (zu Beginn der Übung)