Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Gegeben sei das durch die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 3\}$ berandete beschränkte Gebiet D (vgl. Aufgabe 12).

Man berechne eine auf D harmonische Funktion, die auf K_1 den Wert 1 und auf K_2 den Wert 2 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 12 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 14:

Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^2 (1-it)^2\, dt\,,$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin t + i\cos t}\, dt\,,$

c) $\displaystyle\int_{c_{1,2}} \mathrm{Re}\,(z) dz\,,$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg, von $z_0 = 0$ nach $z_2 = 1+i$. c_2 verbindet auch z_0 und z_2, läuft jedoch zunächst auf der x-Achse bis $z_1 = \sqrt{2}$ und danach auf dem Ursprungskreis vom Radius $\sqrt{2}$ in mathematisch positivem Sinn nach z_2.

d) $\displaystyle\oint_c \bar{z} dz$ für die Ellipse $c(t) = \cos\, t + 3i\, \sin\, t, \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$

e) $\displaystyle\oint_c \frac{|z^2|}{\bar{z}z^2} dz$ für den Einheitskreis $c(t) = e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$

Aufgabe 15:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\int\limits_c 1 + z^2 \, dz$ entlang des geradlinigen Weges von $-(1+i)$ nach $1+i$,

b) $\int\limits_c z \sin z \, dz$ für $c(t) = it$ mit $0 \le t \le 1$,

c) $\int\limits_{-i}^{i} \frac{\ln z}{z} \, dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert),

d) $\int\limits_{-i}^{i} z \ln z \, dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^3}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0 , ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 6z + 10}$, $\quad z_0 = i$ und $z_0 = 0$,

(ii) $f(z) = \frac{z}{e^z + 1}$, $\quad z_0 = \pi(1 + 8i)$,

(iii) $f(z) = \frac{1}{\ln(z-1)}$, $\quad z_0 = 3$ und $z_0 = \frac{5}{4}$.

Abgabetermin: 30.05.2006 (zu Beginn der Übung)