Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

a) Man überprüfe, welche der folgenden Funktionen holomorph in $\mathbb{C}$ sind:

(i) $f(z) = ze^z$,
(ii) $f(z) = \sin(\text{ Re } z)$,
(iii) $f(z) = z^2 + 2\bar{z} + 1$,
(iv) $f(z) = |z|^2 + 2$.

b) Man zeige, dass

$$u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2x^2 - 2y^2 + 1$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x,y)$, d.h. eine Funktion v , für die die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 10:

Es sei $z = re^{i\varphi}$ und $g(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$.

a) Man zeige, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten die Gestalt

$$ru_r = v_\varphi \; , \quad rv_r = -u_\varphi$$

besitzen.

b) Man zeige, dass $\ln z = \ln r + i\varphi$ für $-\pi < \varphi < \pi$ und $r > 0$ holomorph ist.

Aufgabe 11:

Gegeben sei die durch $w = f(z) := e^z$ definierte konforme Abbildung .

a) In welche Kurven der w-Ebene gehen die Koordinatenachsen der z-Ebene unter f über?

b) Man überprüfe die Erhaltung der Winkel und der lokalen Längenverhältnisse im Schnittpunkt der Bildkurven aus a).

Aufgabe 12:

a) Man skizziere die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von K_1 und K_2 unter T, wenn noch $T(0) = 1$ gilt.

Abgabetermin: 16.05.2006 (zu Beginn der Übung)