Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := -\frac{3}{2}i - \frac{2-i}{(1+i)^2}$ und $z_2 := -\sqrt{2}(1+i)$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2 .

b) Man bestimme z_2^4 .

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w - z_2)^4 = 16$ in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 2:

Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{z \in \mathbb{C} : \, |3z - 1 + i| \leq 2\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : \, 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2\pi \, , \, |\mathrm{Re}(z)| < 1\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} : \, \mathrm{Im}((1-i)z) = 0\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} : \, |z - i| + |z + i| < 4\}$.

Aufgabe 3:

a) Man untersuche die Folge

$$z_0 = 1 + i\,, \quad z_{n+1} = \frac{i}{2}\,(2 - i + z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

b) Für eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeige man die folgende Äquivalenz:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z^*) \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z^*)\,.$$

c) Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$ zeige man die folgende Äquivalenz:

$$f \text{ ist stetig in } z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) : D \to \mathbb{R} \text{ sind stetig in } z_0\,.$$

Aufgabe 4:

a) Man bestimme das Bild von $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\,,\ 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1\}$ unter der durch $f(z) = iz^2 + 2$ definierten Abbildung.

b) Man zeige, dass die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

auch für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt.

Abgabetermin: 18.04.2006 (zu Beginn der Übung)