Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2005**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5

Aufgabe 1: Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale. Die angegebenen Kurven sollen einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

a) $\displaystyle\int_{C_k} \frac{e^z}{(z-2i)^5}\,dz \qquad k = 1,2$

$C_1 : |z-1| = 2, \quad C_2 : |z-i| = 2,$

b) $\displaystyle\int_{C} \frac{\cos^2(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^4}\,dz \qquad C : |z-1| = 1,$

c) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{\cos(z)}{z^{4k+1}}\,dz \qquad C : |z| = 1,$

d) $\displaystyle\int_{C} \frac{e^{\pi z}}{z^3 - iz^2}\,dz \qquad C : |z| = 2,$

Aufgabe 2: (Klausuren 2002/2003, Prof. Oberle)

a) Für die Kurven $c_1(t) = it$ mit $-1 \le t \le 1$ und $c_2(t) = 2\cos t + i \sin t$ mit $-\pi/2 \le t \le \pi/2$ berechne man

$$\int_{c_k} \frac{1}{(z-1)^2}\,dz \quad \text{für} \quad k = 1,2\cdot$$

b) Man berechne

(i) $\displaystyle\int_{|z+i|=1} \frac{\cos z}{(z+i)^2}\,dz$ und

(ii) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-2}\,dz.$

Aufgabe 3:

Geben Sie, ohne die Reihen zu berechnen, für die folgenden Funktionen den Radius des größten Kreises um Null an, in dem die Taylorreihe der jeweiligen Funktion mit Entwicklungspunkt 0 gegen f konvergiert.

a)
$$f(z) = \frac{1}{e^{2z} + 1}$$

b)
$$f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

c)
$$f(z) = \frac{1}{\ln\left(\frac{i+3}{2} - z\right)}$$

d)
$$f(z) = \frac{1}{\ln\left(\frac{i-1}{2} - z\right)}$$

Aufgabe 4: (Aus Henrici/Jeltsch Band II)

a) Seien a, b, c komplexe Zahlen, $a \neq b$. Stellen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f \,:\, z \to \frac{c}{z-b}$$

an der Stelle a

(i) durch direkte Berechnung der Ableitungen,

(ii) durch Verwendung der geometrischen Reihe

auf und geben Sie deren Konvergezradius an.

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $\arctan z$ an der Stelle $z = 1$.

Hinweis: Man gehe von $f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ aus, zerlege in Partialbrüche und verwende Teil a).

Abgabetermin: 14.06.05