Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2005**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1:

Geben Sie eine Funktionsvorschrift $f: M \to S$, $z \mapsto f(z)$ an, die

$$M := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| \le R,\ \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$$

für ein festes $R \in \mathbb{R}^+$ so auf den Halbstreifen

$$S := \{z \in \mathbb{C}\,;\ -1 < \mathrm{Re}\,(z) < 1,\ \mathrm{Im}\,(z) \ge 1\}$$

abbildet, dass die Symmetrie des Urbildes bzgl. der reellen Achse in eine Symmetrie des Bildes bzgl. der imaginären Achse übergeht und $f(R) = i$ gilt.

Aufgabe 2:

Die komplexen Hyperbelfunktionen sind definiert durch

$$\sinh(z) \;=\; \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right), \quad \cosh(z) \;=\; \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right).$$

a) Berechnen Sie Real– und Imaginärteil von $\sinh(z)$ und $\cosh(z)$.

b) Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen gelten

$$\sinh(z) \;=\; \frac{1}{i}\sin(iz), \quad \cosh(z) = \cos(iz)\cdot$$

c) Bestimmen Sie alle Lösungen von $\cosh(z) \;=\; 0$.

Aufgabe 3: (Klausur Prof. Oberle 2002)

Gegeben sei die Transformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit

$$T(z) := \frac{1-z}{1+z}.$$

a) Zeigen Sie, dass T eine Möbius–Transformation ist und bestimmen Sie die inverse Transformation.

b) In welche Kurven werden die x–Achse und die y–Achse abgebildet? Skizze!

c) Das Bild der Winkelhalbierenden $x = y$ ist ein Kreis. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises.

d) Skizzieren Sie die Bilder der Sektoren $\pi/4 \le \arg z \le \pi/2$ und $5\pi/4 \le \arg z \le 3\pi/2$.

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie eine Möbius–Tranformation $T : z \to w$ mit $T(1) = 0$, $T(0) = \infty$, $T(2) = \dfrac{i}{2}$.

b) Welches sind die Bilder

(i) der reellen Achse,

(ii) der imaginären Achse,

(iii) des Einheitskreises $|z| = 1$?

c) Bestimmen Sie das Urbild von $|w| = 1$.

Abgabetermin: 26.4.05