Aufgabe 1:

a) Man berechne alle Lösungen von $(z-3)^3 + 27 = 0$ in kartesischen Koordinaten.

b) Gegeben seien die Kreise

$$K_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_3^2 = 1,\ x_2 = 0\right\} ,$$

$$K_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0\right\} .$$

Welches sind die Bilder von K_1 und K_2 unter der stereographischen Projektion?

c) Man berechne die Punkte, die sowohl zum Kreis $|z| = 1$, als auch zum Kreis $|z - 4i| = 2$ symmetrisch sind.

d) Man überprüfe, welche der folgenden Funktionen in $\mathbb{C}$ holomorph sind

$$f(z) = \mathrm{Re}(e^z) , \quad g(z) = z \cdot \mathrm{Im}(z) .$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die durch $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 25}$ definierte Funktion.

a) Man klassifiziere alle Singularitäten von f.

b) Man berechne die Residuen aller Singularitäten.

c) Man gebe die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

d) Man skizziere die Konvergenzbereiche der verschiedenen Laurent-Reihen um $z_0 = 5i$.

e) Man berechne die Laurent-Reihe um $z_0 = 5i$, die im Punkt $z_1 = 0$ konvergiert.

f) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z+4i|=2} f(z)\, dz$.

g) Man berechne $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$.