Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2004**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Gegeben sei die durch $w = f(z) := e^z$ definierte konforme Abbildung .

a) In welche Kurven der w-Ebene gehen die Koordinatenachsen der z-Ebene unter f über?

b) Man überprüfe die Erhaltung der Winkel und der lokalen Längenverhältnisse im Schnittpunkt der Bildkurven aus a).

Aufgabe 10:

a) Man skizziere die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von K_1 und K_2 unter T, wenn noch $T(0) = 1$ gilt.

Aufgabe 11:

Gegeben sei das durch die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 3\}$ berandete beschränkte Gebiet D (vgl. Aufgabe 10).

Man berechne eine auf D harmonische Funktion, die auf K_1 den Wert 1 und auf K_2 den Wert 2 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 10 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 12:

Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^2 (1-it)^2\, dt,$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin t + i\cos t}\, dt,$

c) $\displaystyle\int_{c_{1,2}} \mathrm{Re}\,(z) dz,$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg, von $z_0 = 0$ nach $z_2 = 1+i$. c_2 verbindet auch z_0 und z_2, läuft jedoch zunächst auf der x-Achse bis $z_1 = \sqrt{2}$ und danach auf dem Ursprungskreis vom Radius $\sqrt{2}$ in mathematisch positivem Sinn nach z_2.

d) $\displaystyle\oint_c \bar{z} dz$ für die Ellipse $c(t) = \cos\, t + 3i\, \sin\, t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

e) $\displaystyle\oint_c \frac{|z^2|}{\bar{z}z^2} dz$ für den Einheitskreis $c(t) = e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

Abgabetermin: 25.5.2004