Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2003**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 1:(Klausur 19.2.02, Prof. Struckmeier)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{z^4 + 4} .$$

a) Man berechne alle Singularitäten z_k von f und klassifiziere sie.

b) Man bestimme die Residuen von f an allen Polstellen.

c) Die zu f gehörige und an den hebbaren Singularitäten stetig ergänzte Funktion lautet:

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2} .$$

Man berechne die komplexe Partialbruchzerlegung von $\tilde{f}$.

d) Man berechne die Laurentreihenentwicklung von $\tilde{f}$ um $z_0 = 0$, die für $z^* = i/3$ konvergiert.

e) Unter Verwendung des Residuenkalküls, d.h. ohne Verwendung einer Stammfunktion, berechne man

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, dx .$$

Aufgabe 2: (Teile a) –d) ausder Klausur vom 19.2.03, Prof. Oberle)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{4z + 4i}{(2z - 4)(z^2 + (1 + i)z + i)} .$$

a) Man klassifiziere alle Singularitäten von f .

b) Man berechne $\operatorname{Res}(f; z_k)$ an allen Polstellen z_k von f.

c) Man bestimme $\displaystyle\oint_{|z+i|=2} f(z)\,dz$.

d) Man gebe die Partialbruchzerlegung für $\tilde{f}(z) = \dfrac{2}{z^2 - z - 2}$ an.

e) Man berechne $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2 - x - 2}\,dx$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuenkalküls die folgenden Integrale.

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 16}\,dx$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 16}\,dx$$

Aufgabe 4:

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuenkalküls die folgenden Integrale.

a) (Alte Klausuraufgabe, Prof. Oberle)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 - x}{x^{\frac{3}{2}}(x^3 - x^2 + 4x - 4)}\,dx$$

b)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 + 1}\,dx$$

Hinweis : Berechnen Sie zunächst $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + 1}\,dz$.

Abgabetermin: 15.07.03

Das war Mathe IV !!!! Viel Erfolg in den Klausuren und bei Ihrem weiteren Studium!

gez. Prof. Dr. J. Struckmeier, Dr. P. Kiani, Dipl. Math. M. Hamm