Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2003**
Prof. Dr. J. Stuckmeier
Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

Charakterisieren Sie durch eine Skizze oder mit Worten die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 2\}, \\ M_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 + 2i| \le 1\}, \\ M_3 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - i| + |z - 1 - 3i| = 4\}\ , \\ M_4 &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z + 1 = |z|\}\ , \\ M_5 &= \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 1\}\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) Sei $c \in \mathbb{C}$ und $R \in \mathbb{R};\ R \ge 0$. Zeigen Sie, dass dann die Äquivalenz

$$|z - c| = R \iff z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + c\bar{c} = R^2$$

gilt.

b) Welche Kurve wird folglich durch die Bedingung

$$z\bar{z} - \frac{i}{2}\bar{z} + \frac{i}{2}z = 0$$

beschrieben?

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Abbildung $w = f(z) := \dfrac{1}{z}$ mit $z \neq 0$.

a) Bestimmen Sie die Bilder

  (i) der Strahlen $\arg(z) = \varphi_0$,

  (ii) der Geraden $\mathrm{Re}(z) = x_0$,

  (iii) der Geraden $\mathrm{Im}(z) = y_0$.

b) Zeigen Sie, dass das Bild eines Kreises, der nicht durch Null geht, ein Kreis ist. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Bildkreises.

   Was ist folglich das Bild von $|z - 2| = 1$?

   Hinweis: Man verwende Aufgabe 2.

c) Was ist das Bild des Kreises $|z - \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$?

Aufgabe 4:

Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Streifen $0 \leq \mathrm{Im}\, z \leq \pi$ auf den Keil

$0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ abbildet.

Abgabetermin: 15.4.03