Komplexe Funktionen, SS02, 16.10.2002, (Oberle)

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Transformation $T: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit

$$T(z) = \frac{1-z}{1+z} .$$

a) Man zeige, dass T eine Möbius-Transformation ist und bestimme die inverse Transformation.

b) In welche Kurven werden die x-Achse, d.h. $\operatorname{Im} z = 0$, und die y-Achse, d.h. $\operatorname{Re} z = 0$, abgebildet? Skizze!

c) Das Bild der Winkelhalbierenden $y = x$ ist ein Kreis $|w - w_0| = \rho$. Man bestimme Mittelpunkt w_0 und Radius ρ.

d) Man skizziere das Bild der Winkelbereiche $\pi/4 \leq \arg z \leq \pi/2$ und $5\pi/4 \leq \arg z \leq 3\pi/2$ unter der Transformation $w = T(z)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{e^{z+2} - 1}{(z+2)^3} .$$

a) Man gebe die Singularitäten von f an.

b) Man ermittle die Laurentreihe, die in der Umgebung des Entwicklungspunktes $z_0 = -2$ konvergiert, mit Konvergenzradius R.

c) Man klassifiziere die Singularitäten von f und f'.

d) Man bestimme das Residuum von f in $z_0 = -2$.

e) Man berechne

$$\oint_{|z|=1} f(z)\, dz \quad \text{und} \quad \oint_{|z+2|=1} f(z)\, dz .$$