

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Es sei $z = re^{i\varphi}$ und $g(z) = f(r, \varphi) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$.

- a) Man zeige, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten die Gestalt

$$ru_r = v_\varphi, \quad rv_r = -u_\varphi$$

besitzen.

- b) Man zeige, dass $f(r, \varphi) = \ln r + i\varphi$ für $-\pi < \varphi < \pi$ und $r > 0$ holomorph ist.

Aufgabe 14:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\int_c 1 + z^2 dz$ entlang des geradlinigen Weges von $-(1+i)$ nach $1+i$,

b) $\int_c z \sin z dz$ für $c(t) = it$ mit $0 \leq t \leq 1$,

c) $\int_{-i}^i \frac{\ln z}{z} dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert),

d) $\int_{-i}^i z \ln z dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

Aufgabe 15:

Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

$$\text{a) } \int_{c_{1,2}} \frac{e^z}{(z+i)^5} dz, \quad c_1 : |z+i| = 1, \quad c_2 : |z-2| = 2$$

$$\text{b) } \int_c \frac{z^2+1}{z^3-z^2+z-1} dz, \quad c : \left| z - \frac{1}{2} \right| = 1,$$

$$\text{c) } \int_{c_{1,2}} \frac{(\sin z)^2}{z^3} dz, \quad c_1 : |z-1| = 0.9, \quad c_2 : |z-1| = 1.1,$$

$$\text{d) } \int_{c_{1,2}} \frac{z+i}{z^2+z-6} dz, \quad c_1 : |z-1| = 2, \quad c_2 : |z+4| = 3,$$

$$\text{e) } \int_c \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) dz, \quad c : |z| = 1,$$

$$\text{f) } \int_c \frac{\cos z}{(z+\pi i)^{2n+1}} dz, \quad c : |z| = 2\pi.$$

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^3}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den Entwicklungspunkten z_0 und z_1 , ohne die Reihen selbst zu berechnen:

$$\text{(i) } f(z) = \frac{z^2-1}{z^2-6z+10}, \quad z_0 = i, \quad z_1 = 0,$$

$$\text{(ii) } f(z) = \frac{z}{e^z+1}, \quad z_0 = \pi(1+8i),$$

$$\text{(iii) } f(z) = \frac{1}{\ln(z-1)}, \quad z_0 = 3, \quad z_1 = \frac{5}{4}.$$

Abgabetermin: 4.6. und 7.6.02