Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2002**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Gegeben sei die Möbiustransformation T, und die ihr zugeordnete 2×2 Matrix $\boldsymbol{A}$:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad ad - bc \neq 0\,.$$

a) Man zeige für $c \neq 0$ folgende Aussagen:

(i) T besitzt ein oder zwei Fixpunkte. Man verwende dabei die Fixpunktgleichung $T(z) = z$ und gebe eine Formel zur Berechnung der Fixpunkte $z^*_{1,2}$ an.

(ii) z^* ist genau dann Fixpunkt von T, wenn $(z^*, 1)^T$ Eigenvektor zu $\boldsymbol{A}$ ist.

(iii) Sind $\lambda_{1,2}$ die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$, so lassen sich die Fixpunkte berechnen durch:

$$z^*_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2} - d}{c}\,.$$

Man überprüfe insbesondere, ob diese Formel in Verbindung mit der Berechnung der Eigenwerte über das charakteristische Polynom mit der Berechnungsvorschrift aus (i) übereinstimmt.

b) Man überprüfe die Aussagen am Beispiel $\quad T(z) = \dfrac{1}{3z+2}\,.$

Aufgabe 10:

Gegeben sei die durch $w = f(z) := z^2$ definierte konforme Abbildung .

a) In welche Kurven der w-Ebene gehen die Geraden der z-Ebene $c_1(t) = t + i$ und $c_2(t) = 1 + it$ mit $t \in \mathbb{R}$ unter f über?

b) Man überprüfe die Erhaltung der Winkel und der lokalen Längenverhältnisse im Schnittpunkt der Bildkurven aus a).

Aufgabe 11:

a) Welche zwei Punkte z_1, z_2 sind zugleich symmetrisch (d.h. Spiegelpunkte) zum Kreis $K_1 : |z| = 3$ und zum Kreis $K_2 : |z-6| = \sqrt{6}$? (Skizze!)

b) Man bestimme alle gebrochen-linearen Funktionen $T(z)$ mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild der Kreisscheiben von K_1, K_2 unter $w = T(z)$ mit $T(3) = 1$.

Aufgabe 12:

Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^2 (1-it)^2\, dt,$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin t + i\cos t}\, dt,$

c) $\displaystyle\int_{c_{1,2}} \mathrm{Re}\,(z) dz,$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg, von $z_0 = 0$ nach $z_2 = 1 + i$. c_2 verbindet auch z_0 und z_2, läuft jedoch zunächst auf der x-Achse bis $z_1 = \sqrt{2}$ und danach auf dem Ursprungskreis vom Radius $\sqrt{2}$ in mathematisch positivem Sinn nach z_2.

d) $\displaystyle\oint_c \bar{z} dz$ für die Ellipse $c(t) = \cos\ t + 3i\ \sin\ t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

e) $\displaystyle\oint_c \frac{|z^2|}{\bar{z}z^2} dz$ für den Einheitskreis $c(t) = e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

Abgabetermin: 14.5. und 17.5.02