Aufgabe 1)

a) Sei $Y(s)$ die Laplace Transformierte der Lösung $y(t)$ der Anfangswertaufgabe

$$y''' + y'' + y' + y = e^{-t}\,, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = \frac{3}{2},\, y''(0) = -1\,.$$

Dann erhält man als Laplace Transformierte der Anfangswertaufgabe die folgende algebraische Gleichung im Bildraum

- ☐ $(s^3 + s^2 + s + 1)Y - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{s+1}\,.$
- ☐ $(s^3 + s^2 + s + 1)Y - \frac{3s}{2} + 1 = \frac{1}{s-1}\,.$
- ☐ $(s^3 + s^2 + s + 1)Y - \frac{3s}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{s+1}\,.$

b) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y' = A\,y \qquad \text{mit} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei i die imaginäre Einheit ($i^2 = -1$). Die Matrix A hat den doppelten Eigenwert $2i$. Die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}^T, \qquad \text{und} \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

sind Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert $2i$. Aus diesen Informationen folgt:

- ☐ Durch
$$y(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos(2t) \\ c_2 \sin(2t) \\ c_3 \cos(2t) \\ -c_4 \sin(2t) \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$
ist die allgemeine reelle Lösung des Systems gegeben.

☐ Die Funktionen

$$y^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \quad y^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$y^{[3]}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y^{[4]}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bilden ein reelles Fundamentalsystem für die Aufgabe $y' = A\,y$.

☐ Für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe

$$y' = A\,y\,, \quad y(0) = (1,1,1,1)^T$$

gilt $y(\pi) = (1,\ 0,\ 1,\ 0)^T$.

☐ Der Gleichgewichtspunkt $y = (0,0,0,0)^T$ ist strikt stabil.

c) Mit Hilfe der folgenden Matlab Befehle soll eine Näherung für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = \frac{e^{-t}}{t^2+1}\,y(t)\,, \quad y(0) = 2$$

für $t \in [0,3]$ berechnet und geplottet werden.

```
function klausur
tspan= [0 3];
y0=2;
[t,y] = ode45(@AWA, tspan, y0);
 plot(t,y)
```

(i) Schreiben Sie das noch fehlende Unterprogramm zur Auswertung der rechten Seite der Differentialgleichung.

(ii) Ergänzen Sie das Programm, so dass ein Näherungswert $y3$ für den Wert der Lösung y(t) an der Stelle $t = 3$ ausgegeben wird. Sie brauchen nicht das Programm abzuschreiben. Geben Sie nur an, an welcher Stelle welche zusätzliche(n) Zeile(n) stehen muss/müssen.

Aufgabe 2)

a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2\, y_2 + y_2^3 - 2y_1\, y_2^2 \\ y_2' &= -\, y_1^3 - y_1\, y_2^2 . \end{aligned}$$

Untersuchen Sie den Gleichgewichtspunkt $y_1^* = y_2^* = 0$ des Systems auf Stabilität. Verwenden Sie gegebenenfalls eine Funktion der Form

$$V(y_1, y_2) = a y_1^2 + b y_2^2 .$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung

$$y''' + y'' = 2 .$$

c) Schreiben Sie die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y''' + y'' &= 2 , \\ 2y(0) - y'(0) &= 0 , \\ y(1) - y'(1) &= 0 , \\ y''(0) - y''(1) &= 0 , \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise um.