

Aufgabe 1)

a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei i die imaginäre Einheit ($i^2 = -1$). Die Matrix A hat den doppelten Eigenwert $2i$. Die Vektoren

$$v_1 := (1 \ i \ 0 \ 0)^T, \quad \text{und} \quad v_2 := (0 \ 0 \ 1 \ -i)^T$$

sind Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert $2i$. Aus diesen Informationen folgt:

Der Gleichgewichtspunkt $y = (0, 0, 0, 0)^T$ ist strikt stabil.

Die Funktionen

$$y^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y^{[3]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \quad y^{[4]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$$

bilden ein reelles Fundamentalsystem für die Aufgabe $y' = Ay$.

Durch

$$y(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos(2t) \\ -c_2 \sin(2t) \\ c_3 \cos(2t) \\ -c_4 \sin(2t) \end{pmatrix} \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \text{ ist die allgemeine reelle}$$

Lösung des Systems gegeben.

Für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay, \quad y(0) = (1, 1, 1, 1)^T$$

gilt $y(\pi) = (1, 1, 1, 1)^T$.

- b) Sei $Y(s)$ die Laplace Transformierte der Lösung $y(t)$ der Anfangswertaufgabe

$$y''' + y'' + y' + y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{3}{2}, \quad y''(0) = -1.$$

Dann erhält man als Laplace Transformierte der Anfangswertaufgabe die folgende algebraische Gleichung im Bildraum

$$\square \quad (s^3 + s^2 + s + 1)Y - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{s + 1}.$$

$$\square \quad (s^3 + s^2 + s + 1)Y - \frac{3s}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{s + 1}.$$

$$\square \quad (s^3 + s^2 + s + 1)Y = \frac{1}{s + 1}.$$

- c) Mit Hilfe der folgenden Matlab Befehle soll eine Näherung für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = \frac{e^{-t}}{t^2 + 1} y(t), \quad y(0) = 2$$

für $t \in [0, 3]$ berechnet und geplottet werden.

```
function klausur
tspan= [0 3];
y0=2;
[t,y] = ode45(@AWA, tspan, y0);
plot(t,y)
```

- (i) Schreiben Sie das noch fehlende Unterprogramm zur Auswertung der rechten Seite der Differentialgleichung.
- (ii) Ergänzen Sie das Programm, so dass ein Näherungswert y_3 für den Wert der Lösung $y(t)$ an der Stelle $t = 3$ ausgegeben wird. Sie brauchen nicht das Programm abzuschreiben. Geben Sie nur an, an welcher Stelle welche zusätzliche(n) Zeile(n) stehen muss/müssen.

Aufgabe 2)

- a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = y_1^2 y_2 + y_2^3 - 2y_1 y_2^2$$

$$y_2' = -y_1^3 - y_1 y_2^2.$$

Untersuchen Sie den Gleichgewichtspunkt $y_1^* = y_2^* = 0$ des Systems auf Stabilität. Verwenden Sie gegebenenfalls eine Funktion der Form

$$V(y_1, y_2) = ay_1^2 + by_2^2.$$

- b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung

$$y''' + y'' = 2.$$

- c) Schreiben Sie die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}y''' + y'' &= 2, \\2y(0) - y'(0) &= 0, \\y(1) - y'(1) &= 0, \\y''(0) - y''(1) &= 0,\end{aligned}$$

in Matrixschreibweise um.