Aufgabe 1)

Bitte bewerten Sie folgende Aussagen. Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben ,,w" (für wahr) oder ,,f" für falsch ein. Für jede richtig bewertete Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch bewertete Aussage wird Ihnen ein halber Punkt abgezogen. Nicht bewertete Aussagen gehen nicht in die Wertung ein.

a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y' = A\,y \qquad \text{mit} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei i die imaginäre Einheit ($i^2 = -1$). Die Matrix A hat den doppelten Eigenwert $2i$. Die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad \text{und} \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}^T$$

sind Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert $2i$. Aus diesen Informationen folgt:

☐ Durch

$$y(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos(2t) \\ -c_2 \sin(2t) \\ c_3 \cos(2t) \\ -c_4 \sin(2t) \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

ist die allgemeine reelle Lösung des Systems gegeben.

☐ Die Funktionen

$$y^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y^{[3]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \qquad y^{[4]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$$

bilden ein reelles Fundamentalsystem für die Aufgabe $y' = A\,y$.

☐ Für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe

$$y' = A\,y\,, \quad y(0) = (1, 1, 1, 1)^T$$

gilt $y(\pi) = (1,\, -1,\, -1,\, 1)^T$.

☐ Der Gleichgewichtspunkt $y = (0,0,0,0)^T$ ist strikt stabil.

b) Sei $Y(s)$ die Laplace Transformierte der Lösung $y(t)$ der Anfangswertaufgabe

$$y''' + y'' + y' + y = e^{-t}, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = \frac{3}{2},\, y''(0) = -1\,.$$

Dann erhält man als Laplace Transformierte der Anfangswertaufgabe die folgende algebraische Gleichung im Bildraum

☐ $(s^3 + s^2 + s + 1)Y = \dfrac{1}{s+1}$.

☐ $(s^3 + s^2 + s + 1)Y - \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{1}{s+1}$.

☐ $(s^3 + s^2 + s + 1)Y - \dfrac{3s}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{s+1}$.

c) Mit Hilfe der folgenden Matlab Befehle soll eine Näherung für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = \frac{e^{-t}}{t^2+1}\, y(t)\,, \quad y(0) = 2$$

für $t \in [0,3]$ berechnet und geplottet werden.

```
function klausur
tspan= [0 3];
y0=2;
[t,y] = ode45(@AWA, tspan, y0);

 plot(t,y)
```

(i) Schreiben Sie das noch fehlende Unterprogramm zur Auswertung der rechten Seite der Differentialgleichung.

(ii) Ergänzen Sie das Programm, so dass ein Näherungswert $y3$ für den Wert der Lösung y(t) an der Stelle $t = 3$ ausgegeben wird.

Sie brauchen nicht das Programm abzuschreiben. Geben Sie nur an, an welcher Stelle welche zusätzliche(n) Zeile(n) stehen muss/müssen.

Aufgabe 2)

a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2\, y_2 + y_2^3 - 2y_1\, y_2^2 \\ y_2' &= -\, y_1^3 - y_1\, y_2^2\,. \end{aligned}$$

Untersuchen Sie den Gleichgewichtspunkt $y_1^* = y_2^* = 0$ des Systems auf Stabilität. Verwenden Sie gegebenenfalls eine Funktion der Form

$$V(y_1, y_2) = a y_1^2 + b y_2^2\,.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung

$$y''' + y'' = 2\,.$$

c) Schreiben Sie die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y''' + y'' &= 2\,, \\ 2y(0) - y'(0) &= 0\,, \\ y(1) - y'(1) &= 0\,, \\ y''(0) - y''(1) &= 0\,, \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise um