Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2006/07**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21)

Bitte bewerten Sie folgende Aussagen. Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben ,,w" (für wahr) oder ,,f" für falsch ein. Für jede richtig bewertete Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch bewertete Aussage wird Ihnen ein halber Punkt abgezogen. Nicht bewertete Aussagen gehen nicht in die Wertung ein.

a) Die folgenden Randwertaufgaben sind eindeutig lösbar

☐ $$\begin{cases} y''(x) - 4y(x) = 0 & x \in (0, L) \\ 2y(0) - y'(0) + 2e^{2L}y'(L) = e^{2L}, & 2y(L) + y'(L) = 0\,. \end{cases}$$

☐ $$\begin{cases} y''(x) - 4y(x) = 1 & x \in (0, L) \\ 2y(0) - y'(0) + 2e^{2L}y'(L) = e^{2L}, & 2y(L) + y'(L) = e^{-2L}\,. \end{cases}$$

☐ $$\begin{cases} y''(x) - 4y(x) = 1 & x \in (0, L) \\ y(0) = 0, & y(L) = 0\,. \end{cases}$$

☐ $$\begin{cases} y'''(x) + y'(x) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ y(0) = 0, & y(\pi) = 1, \qquad f \text{ stetig}\,. \end{cases}$$

☐ $$\begin{cases} y'''(x) + y'(x) = e^{-x}\cos(x) & x \in (0, \pi/2) \\ y(0) = y'(0) = 0, & y(\pi/2) = 1\,. \end{cases}$$

b) Gegeben sei die Variationsaufgabe

$$I[y] := \int_0^1 (1+t^2)(y'(t))^2 + \frac{2y(t)}{(1+t)^2}\,dt \;=\; \min!$$
$$y \;\in C^2[0,1]\,,\; y(0) \;=\; 0\,.$$

☐ Die Euler–Lagrange Gleichung des Problems lautet $\dfrac{2}{(1+t)^2} - 4ty' \;=\; 0\,.$

☐ Die Randbedingungen lauten $y(0) \;=\; 0\,,\quad y(1) = 0$

☐ Die Randbedingungen lauten $y(0) \;=\; 0\,,\quad y'(1) = 0$

☐ Durch Integration der Euler–Lagrange Gleichung nach t erhält man

$$-\,2\,(1+t^2)y'(t) \;-\; \frac{2}{1+t} = C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

☐ Als Lösung der Aufgabe erhält man

$$y(t) \;=\; \ln\left(\frac{\sqrt[4]{1+t^2}}{\sqrt[2]{1+t^1}}\right)\,.$$

Aufgabe 22) [Klausur 04/05, Prof. Oberle]

Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1'(t) & = & -2x_1(t) & + & 3x_2(t) & + & 8t & + & 3 \\ x_2'(t) & = & 10x_1(t) & - & 3x_2(t) & - & 16t & - & 6 \end{array}$$

$$2x_1(0) + x_2(0) \;=\; \alpha, \quad x_1(1) - x_2(1) \;=\; \beta\,, \qquad \alpha, \beta \,\in\, \mathbb{R}\,.$$

a) Formulieren Sie die Randwertaufgabe in Matrixschreibweise.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems mit Hilfe des Ansatzes

$$x(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} \qquad a,\, b,\, c,\, d \,\in \mathbb{R}.$$

d) Zeigen Sie, dass die Randwertaufgabe für beliebige $\alpha, \beta \,\in\, \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 23)

Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} & y'' - \frac{3}{x}\,y' + \frac{4}{x^2}\,y = f(x) \\ & \alpha y(1) - \beta y'(1) = 0 \qquad y(2) - y'(2) = 0 \end{aligned}$$

mit einer auf dem Intervall [1,2] stetigen Funktion f und reellen Zahlen α und β.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem $y^{[1]}(x)$, $y^{[2]}(x)$ für die zugehörige homogene Differentialgleichung $y'' - \frac{3}{x}\,y' + \frac{4}{x^2}\,y = 0$, indem Sie für $y^{[1]}(x)$ den Ansatz $y^{[1]}(x) = x^m$ und anschließend für $y^{[2]}(x)$ den Reduktionsansatz $y^{[2]}(x) = w(x)y^{[1]}(x)$ wählen.

b) Schreiben Sie die Randwertaufgabe in eine äquivalente Aufgabe für ein System erster Ordnung um, und untersuchen Sie, für welche α und β die Aufgabe für jede stetige rechte Seite f eindeutig lösbar ist.

c) Lösen Sie die Aufgabe aus a) für $\alpha = 3$, $\beta = 1$ und $f(x) = x^2$ mit Hilfe der Greenschen Funktion.

Aufgabe 24) [Klausur 04/05, Prof. Oberle]

Gegeben ist die Variationsaufgabe : Minimiere $I[y] = \int_0^1 (t^2 + 4y^2 + (y')^2)\, dt$ unter der Nebenbedingung $y(0) = 1$.

a) Stellen Sie die Euler–Lagrange Gleichung des Variationsproblems auf und geben Sie die natürliche Randbedingung an.

b) Lösen Sie die sich aus a) ergebende Randwertaufgabe.

c) Zeigen Sie, dass die Lösung aus b) zugleich die Variationsaufgabe löst.

Abgabetermine: 29.01-02.02.2007