Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2006/07**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17)

Bitte bewerten Sie folgende Aussagen. Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben ,,w" (für wahr) oder ,,f" für falsch ein. Für jede richtig bewertete Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch bewertete Aussage wird Ihnen ein halber Punkt abgezogen. Nicht bewertete Aussagen gehen nicht in die Wertung ein.

a) Der stationäre Punkt $(0,0)^T$ des linearen Systems $y' = A\,y$ ist für

☐ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ein stabiler Strudelpunkt.

☐ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ein asymptotisch stabiler Knotenpunkt.

☐ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ stabil.

b) Der stationäre Punkt $(0,0)^T$ des linearen Systems $y' = \begin{pmatrix} 1+2\epsilon & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} y$ ist

☐ für $\epsilon \in (0,1)$ ein stabiler Strudelpunkt.

☐ für $\epsilon = 0$ ein stabiler Wirbelpunkt.

☐ für $\epsilon < 0$ ein stabiler Strudelpunkt.

c) Sei F die Laplacetransformierte von f, also $f \circ\!\!-\!\!\bullet F$. Dann gilt

☐ mit $f(t) = e^{-t}\sin(2t)$, $F(s) = \dfrac{1}{s+1} \cdot \dfrac{2}{s^2+4}$.

☐ mit $f(t) = e^{-t}\sin(2t)$, $F(s) = \dfrac{2}{s^2+2s+5}$.

☐ mit $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+9)^3}$, $f(t) = \dfrac{t}{12} \cdot \cos(3t)$.

☐ mit $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+9)^3}$, $f(t) = \dfrac{t}{12} \cdot \sin(3t)$.

Aufgabe 18) [Klausur 04/05, Prof. Oberle]

Sei $\alpha \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq 0$.

a) (i) Bestimmen Sie die beiden stationären Punkte des Systems

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - 2xy \\ y' &= -2y + 4xy. \end{aligned}$$

(ii) Geben Sie ein α an, für das der eine stationäre Punkt stabil und der andere instabil ist.

b) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\left(y_1 + y_1^3 + y_2\right)\,\cdot \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Parameter α und β, so dass

$$V(y_1, y_2) = \alpha y_1^2 + \beta y_1^4 + y_2^2$$

eine Ljapunov–Funktion des obigen Differentialgleichungssystems zum Gleichgewichtspunkt $y_1^* = y_2^* = 0$ ist.

Aufgabe 19)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben mit Hilfe der Laplace Transformation.

a) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 2t^3 e^{-t}, \quad y(0) = 1,\, y'(0) = 0,\, y''(0) = -1$

b) $y'' + \dfrac{\pi^2}{4}\, y = \dfrac{\pi}{2}\,[\delta(t-1) - \delta(t-3)]\,, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 0$

Wobei $\delta(t)$ die Diracsche Delta Distribution sei.

Skizzieren Sie die Lösung aus Teil b).

Aufgabe 20) Lösen Sie das folgende System mit Hilfe der Laplace Transformation.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + 1 \qquad & x(0) &= 1 \\ \dot{y} &= x + t \qquad & y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Abgabetermine: 15.01-19.01.2007