**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2006/07**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

# Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 4

**Aufgabe 13:** Für den unten skizzierten Drei–Massen–Schwinger gelten mit den Bezeichnungen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $F$ | : | Äußere Kraft, | $F_{C_i}$ | : | Coulombische Reibungskräfte, |
| $c_i$ | : | Federkonstanten, | $d_i$ | : | Dämpfungskonstanten, |
| $m_i$ | : | Massen, | $x_i$ | : | Auslenkungen aus der Anfangslage |

unter vereinfachenden Annahmen die Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= -c_1x_1 - d_1\dot{x}_1 + c_2(x_2 - x_1) + d_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_{C_1}\,, \\
m_2\ddot{x}_2 &= -c_2(x_2 - x_1) - d_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3(x_3 - x_2) + d_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + F_{C_2}\,, \\
m_3\ddot{x}_3 &= -c_3(x_3 - x_2) - d_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + F_{C_3} + F\,\cdot
\end{aligned}$$

Im folgenden untersuchen wir einen Schwinger mit den Daten

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
m_{1,2} &=& 0.322\ kg & m_3 &=& 0.161\ kg \\
F &=& 2500\ N & F_{C_i} &=& 0\ N \quad i=1,2,3 \\
c_i &=& 143413\ N/m & d_i &=& 200\ Ns/m \\
x_i(0) &=& 0\quad m & \dot{x}_i(0) &=& 0\ m/s\,.
\end{array}$$

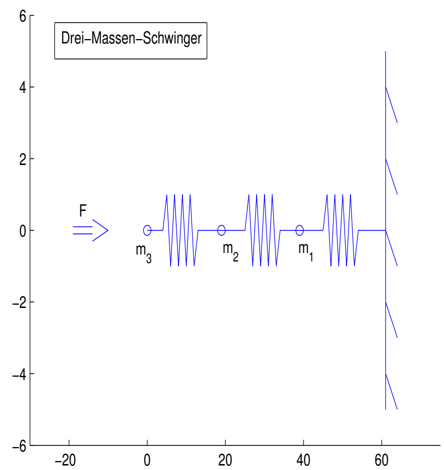
a) Schreiben Sie das System in die Matrix-Schreibweise $y'(t) = Ay(t) + b$ um.

b) Berechnen Sie Näherungen für die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A. Wie verhalten sich die Lösungen des homogenen Systems für $t \to \infty$ ?

c) Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems erhält man durch den speziellen Ansatz $y \equiv K \in \mathbb{R}^6$ mit $y' = 0$ (Ruhelage). Berechnen Sie eine Näherung für diese spezielle Lösung.

d) Berechnen Sie eine Näherung für die Lösung $x(t)$, $t \in [0, 0.2]$ zum Beispiel mit ode23 (Matlab).

**Hinweis :** Die Matlab Befehle [V,D] = eig(A) und A \ z könnten hilfreich seien.




**Aufgabe 14:**

Bitte bewerten Sie folgende Aussagen. Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben ,,w" (für wahr) oder ,,f" für falsch ein. Für jede richtig bewertete Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch bewertete Aussage wird Ihnen ein halber Punkt abgezogen. Nicht bewertete Aussagen gehen nicht in die Wertung ein.

a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $y'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y(t)\,.$

Jede reelle Lösung des Systems lässt sich mit geeigneten konstanten Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4$ und geeigneten reellen Zahlen $c_1, c_2, c_3, c_4$ wie folgt darstellen:

☐ $c_1 e^{5t} v_1 + c_2 e^{5t} v_2 + c_3 e^{-t} v_3 + c_4 e^{-3t} v_4$

☐ $c_1 e^{5t} v_1 + c_2 t e^{5t} v_2 + c_3 e^{-t} v_3 + c_4 e^{-3t} v_4$

b) Das Differentialgleichungssystem $y'(t) = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{6} \end{pmatrix} y(t)\,.$

☐ hat mit geeigneten konstanten Vektoren $v_1, v_2, v_3$ und geeigneten reellen Zahlen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ein Fundamentalsystem der Form $(e^{\alpha t} v_1\,,\ e^{\beta t} v_2\,,\ e^{\gamma t} v_3)\,.$

c) Gegeben sei die Differentialgleichung $y^{(3)} + 4y' = 0\,.$

☐ Die Funktionen $y_1(x) \equiv 1$, $y_2(x) = \cos(2x)$, $y_3(x) = \sin^2(x)$ bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

☐ Die Funktionen $y_1(x) \equiv 1$, $y_2(x) = \sin(2x)$, $y_3(x) = \cos^2(x)$ bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Hinweis : Wronski–Determinante!

d) Der Vektor $v = (1,0,0)^T$ ist ein Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, d.h. $(A - \lambda I)v = 0$.

Die Vektoren $w^{[1]} = (1,1,0)^T$ und $w^{[2]} = (0,1,0)^T$ sind Hauptvektoren erster Stufe, d.h. $(A - \lambda I)^2 w_k = 0$, $k = 1,2$.

Die Vektoren $u^{[1]} = (0,0,1)^T$ und $u^{[2]} = (0,1,1)^T$ sind Hauptvektoren zweiter Stufe, d.h. $(A - \lambda I)^3 u_k = 0$, $k = 1,2$.

Demnach erhält man die folgende Darstellung der allgemeinen Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y}(t) = A\,y(t)$:

☐ $$y(t) = c_1\,e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\,e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\,e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} + t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

☐ $$y(t) = c_1\,e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\,e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\,e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} + t \\ t+1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

☐ $$y(t) = c_1\,e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\,e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\,e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e) Das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} y$ hat das komplexe Fundamentalsystem

$$u(t) = e^{(-1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}, \quad v(t) = e^{(-1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist zum Beispiel gegeben durch:

☐ $$y_{[1]}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix}, \quad y_{[2]}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

☐ $$y_{[1]}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_{[2]}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 15:**

**Hinweis :** Sie können für die partikulären Lösungen der inhomogenen Aufgaben spezielle Ansätze verwenden .

a) Gegeben seien die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1/3 & 2 & 0 \\ -2/3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie der Vektor} \quad b(t) := \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y}(t) = A\,y(t) + b(t)\cdot$$

b) (i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' = 4y - 6y' + 4y''.$$

(ii) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit

$$y(0) = 0,\; y'(0) = 3,\; y''(0) = 8\,.$$

(iii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 2e^{2t}.$$

**Aufgabe 16:**

Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ t\,e^{2t} \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Hinweis :** Variation der Konstanten

**Abgabetermine:** 18.12-22.12.2006