Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2006/07**
Prof. Dr.H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Eine Katze jagt in der (x, y)–Ebene eine Maus. Dabei läuft sie stets mit betragsmäßig konstanter Geschwindigkeit v_K mit $\|v_K\| = 2$ direkt auf die Maus zu. Die Maus ihrerseits läuft auf direktem Wege mit der betragsmäßig konstanten Geschwindigkeit v_M mit $\|v_M\| = 1$ auf ihr Loch, welches sich im Punkt $(0, 1)^T$ befindet, zu. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich die Maus im Punkt $(0, 0)^T$ und die Katze im Punkt $(1, 0)^T$.

a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die die Bahn der Katze beschreibt.

b) Berechnen Sie mit Hilfe eines Integrators (etwa ode45 aus Matlab), wann und wo sich die Katze bis auf 10^{-5} Längeneinheiten der Maus genähert haben wird, und plotten Sie die Bahnen von Katze und Maus.

Hinweise:

- Das Problem klingt nur harmlos, wie jede Parabel aus dem Tierreich!
- Machen Sie sich vor der numerischen Berechnung klar, dass das Modell nur für $t \in$ [0,1] gelten kann. Überlegen Sie dann, ob die Lösung des Differentialgleichungssystems für beliebige $t \in$ [0,1] existiert. Prüfen Sie insbesondere, ob die rechten Seiten der Differentialgleichungen für beliebige $t \in$ [0,1] existieren.
- Schauen Sie nicht zu weit in die Zukunft, sonst verschwinden Katz und Maus auf nimmer Wiedersehen!
- Matlab kann mit der Eingabe

  Ctrl C

  unterbrochen werden!

Aufgabe 10:

Bitte bewerten Sie folgende Aussagen. Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben ,,w" (für wahr) oder ,,f" für falsch ein. Für jede richtig bewertete Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch bewertete Aussage wird Ihnen ein halber Punkt abgezogen. Nicht bewertete Aussagen gehen nicht in die Wertung ein.

a) Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = t^2(y(t)-1)$. Es sei $y(0) = 2$ vorgegeben.

(i) Das Eulersche Polygonzug–Verfahren mit der Schrittweite $h = \dfrac{1}{4}$ liefert

- ☐ nach 2 Schritten die Näherung $y(0.5) \approx y_2 = 2.0675\cdots$
- ☐ nach 4 Schritten die Näherung $y(1.0) \approx y_4 = 2.2308\cdots$

(ii) Das Verfahren der sukzessiven Approximation liefert

- ☐ nach einem Schritt $y^{[1]}(t) = 2 + \dfrac{t^3}{3}$
- ☐ nach zwei Schritten eine Näherung $y^{[2]}(t)$ mit $y^{[2]}(1) \approx 2.5898\cdots$
- ☐ Die exakte Lösung hat den Wert $y(1) = 2.3956\cdots$.

b) Bei der Ausführung folgendender Matlab Befehle

```
 t0=2;
tfinal=3;

N = 10;
h=(tfinal-t0)/N;
y(1) = 2;


t= t0:h:tfinal;
for i=1:N
    y(i+1) = y(i) + h*t(i)*y(i);
end
plot(t,y)
erg=y(N+1)
```

- ☐ wird mit Hilfe des Eulerschen Polygonzugverfahrens eine Näherung für die Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = y \cdot t$, $y(1) = 2$ im Intervall $[t0, tfinal]$ berechnet.
- ☐ wird unter anderem eine Näherung für den Wert der Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = y \cdot t$, $y(2) = 2$ an der Stelle $t = N + 1$ berechnet.

c) Die Matlab Befehle

```
x=1:10;   y=x*x
```

erzeugen einen Vektor $x \in \mathbb{R}^{10}$ mit $x_k = k$ und

☐ einen Vektor $y \in \mathbb{R}^{10}$ mit $y_k = x_k^2$

☐ das Skalarprodukt $y =< x, x >= \sum_{k=1}^{10} x_k^2$

☐ eine Fehlermeldung.

Aufgabe 11:

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} y \qquad y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis : Das System hat eine Lösung der Form $(g(x), g(x))^T$.

Aufgabe 12:

Gegeben sei die parameterabhängige skalare Anfangswertaufgabe

$$\dot{y}\,(t; t_0, y_0, \epsilon) \;=\; f(t, y(t; t_0, y_0, \epsilon), \epsilon), \qquad y(t_0; t_0, y_0, \epsilon) = y_0\,.$$

a) Nehmen Sie an, dass die Lösungen für alle (t_0, y_0, ϵ) aus einem geeigneten Gebiet G mindestens C^2–Funktionen sind. Zeigen Sie, dass die Variation

$$\omega(t) \;:=\; \frac{\partial y(t; t_0, y_0, \epsilon)}{\partial \epsilon}$$

eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{\omega}(t) \;=\; f_y(t, y\,(t; t_0, y_0, \epsilon), \epsilon)\;\omega(t) \;+\; f_\epsilon(t, y(t; t_0, y_0, \epsilon), \epsilon)\,, \qquad \omega(t_0) \;=\; 0$$

ist.

b) Die Anfangswertaufgabe

$$\dot{y} \;=\; y \;+\; \epsilon\, y^3 \;+ 1 \quad y(0) = 1\,,$$

ist für $\epsilon = 0$ sehr einfach zu lösen. Für $\epsilon \neq 0$ wird Ihnen eine analytische Berechnung der Lösung kaum möglich sein. Berechnen Sie zur Approximation der Lösung für kleine $|\epsilon|$ das Taylorpolynom ersten Grades zur Funktion $y(t; t_0, y_0, \epsilon)$ bei Entwicklung nach ϵ mit dem Entwicklungspunkt $\epsilon_0 = 0$.

c) Vergleichen Sie für $\epsilon = 0.1$ und $t \in [0, 0.75]$ die Approximation aus Teil b) mit der von ode45 gelieferten Lösung.

Abgabetermine: 4.12-8.12.2006