Aufgabe 1)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq 0.$

(a) Bestimmen Sie die beiden stationären Punkte des Systems

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - 2xy \\ y' &= -2y + 4xy. \end{aligned}$$

(b) Geben Sie ein α an, für das der eine stationäre Punkt stabil und der andere instabil ist.

(c) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\,\left(y_1 + y_1^3 + y_2 \right)\ . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Parameter α und β, so dass

$$V(y_1, y_2) \;=\; \alpha y_1^2 + \beta y_1^4 + y_2^2$$

eine Ljapunov–Funktion des obigen Differentialgleichungssystems zum Gleichgewichtspunkt $y_1^* \;=\; y_2^* \;=\; 0$ ist.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Variationsaufgabe

Minimiere $I[y] \;=\; \int\limits_0^1 (\,t^2 \,+\, 4y^2 \,+\, (y')^2)\; dt$

unter der Nebenbedingung $y(0) \;=1\,.$

a) Stellen Sie die Euler–Lagrange Gleichung des Variationsproblems auf und geben Sie die natürliche Randbedingung an.

b) Lösen Sie die sich aus a) ergebende Randwertaufgabe.

c) Zeigen Sie, dass die Lösung aus b) zugleich die Variationsaufgabe löst.