Aufgabe 1)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq 0$.

(a) Bestimmen Sie die beiden stationären Punkte des Systems

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - 2xy \\ y' &= -2y + 4xy. \end{aligned}$$

(b) Geben Sie ein α an, für das der eine stationäre Punkt stabil und der andere instabil ist.

(c) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\,\left(y_1 + y_1^3 + y_2\right)\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Parameter α und β, so dass

$$V(y_1, y_2) \;=\; \alpha y_1^2 + \beta y_1^4 + y_2^2$$

eine Ljapunov–Funktion des obigen Differentialgleichungssystems zum Gleichgewichtspunkt $y_1^* = y_2^* = 0$ ist.

Lösung zu Aufgabe 1)

(a)

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - 2xy &&= x(\alpha - 2y) \\ y' &= -2y + 4xy &&= 2y(-1 + 2x) \end{aligned}$$

stationäre Punkte

$$\begin{array}{cccc} & x = 0 & \vee & y = \frac{\alpha}{2} \\ \textbf{und} & & & \\ & y = 0 & \vee & x = 1/2 \end{array}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \alpha/2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$Jf(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} \alpha - 2y & -2x \\ 4y & -2 + 4x \end{pmatrix}$$

$$Jf(0,0) \;=\; \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha \\ \lambda_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$Jf\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\alpha}{2}\right) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2\alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \mu^2 + 2\alpha &= 0 \\ \mu_{1,2} &= \pm\sqrt{-2\alpha} \end{aligned}$$

Für $\alpha < 0$ ist $\binom{0}{0}$ stabil und $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\alpha}{2}\right)^T$ instabil.

(c)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -(y_1 + y_1^3 + y_2) \\ V(y_1, y_2) &= \alpha y_1^2 + \beta y_1^4 + y_2^2 \\ \nabla V &= \binom{2\alpha y_1 + 4\beta y_1^3}{2y_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < \nabla V, f > &= 2\alpha y_1 y_2 + 4\beta y_1^3 y_2 - 2y_1 y_2 - 2y_2 y_1^3 - 2y_2^2 \\ &= 2(\alpha - 1) y_1 y_2 + 2y_2 y_1^3 (2\beta - 1) - 2y_2^2 \end{aligned}$$

Wähle $\alpha = 1$ $\beta = 1/2$, dann gilt

$$\begin{aligned} < \nabla V, f > &= -2y_2^2 \leq 0 \qquad \forall\ (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2 \\ V(0,0) &= 0 \\ V(y_1, y_2) &> 0 \qquad \forall\ (y_1, y_2)^T \neq (0,0)^T \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ V ist eine **Ljapunov-Funktion**.

Aufgabe 2)

Gegeben ist die Variationsaufgabe : Minimiere $I[y] = \int\limits_0^1 (t^2 + 4y^2 + (y')^2)\, dt$ unter der Nebenbedingung $y(0) = 1$.

a) Stellen Sie die Euler–Lagrange Gleichung des Variationsproblems auf und geben Sie die natürliche Randbedingung an.

b) Lösen Sie die sich aus a) ergebende Randwertaufgabe.

c) Zeigen Sie, dass die Lösung aus b) zugleich die Variationsaufgabe löst.

Lösung zu Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned} f(t,y,y') &= t^2 + 4y^2 + y'^2\ , \\ I(y) &= \int_0^1 f(t,y,y')\, dt \\ f_y &= 8y\ , \\ f_{y'} &= 2y' \end{aligned}$$

Euler-Lagrange Dgln. $\quad 0 = f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 8y - 2y'' \Longrightarrow y'' - 4y = 0$

Natürl. Randbed. $\quad f_{y'}[1] = 2y'(1) = 0 \Longrightarrow y'(1) = 0$

(b) Randwertproblem:

$$\begin{aligned} & y'' - 4y = 0 \\ & y(0) = 1, \quad y'(1) = 0 \end{aligned}$$

Allg. Lösung $y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 &&= 1 \\ y'(1) &= 2(C_1 e^2 - C_2 e^{-2}) &&= 0 \end{aligned}\right\} \quad C_1 = \frac{e^{-2}}{e^2 + e^{-2}}, \quad C_2 = \frac{e^2}{e^2 + e^{-2}}$$

$$y(t) = \frac{e^{2(t-1)} + e^{-2(t-1)}}{e^2 + e^{-2}} = \frac{\cos h(2(t-1))}{\cos h(2)}$$

(c) Ist $y = y_0 + u,\ u(0) = 0$ Vergleichskurve, so folgt:

$$
\begin{aligned}
I(y_0+u) - I(y_0) &= \int_0^1 \left[t^2 + 4(y_0+u)^2 + (y_0' + u')^2\right] - \left[t^2 + 4y_0^2 + y_0'^2\right] \\
&= \int_0^1 (8y_0 u + 2y_0' u')\, dt + \int_0^1 (4u^2 + u'^2)\, dt \\
&\geq 2y_0' u \Big|_0^1 + \int_0^1 2(4y_0 - y_0'')u\, dt = 0 \qquad \square
\end{aligned}
$$