Aufgabe 1:

Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1'(t) & = & -2x_1(t) & + & 3x_2(t) & + & 8t & + & 3 \\ x_2'(t) & = & 10x_1(t) & - & 3x_2(t) & - & 16t & - & 6 \end{array}$$

$$2x_1(0) + x_2(0) = \alpha, \quad x_1(1) - x_2(1) = \beta\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

a) Formulieren Sie die Randwertaufgabe in Matrixschreibweise.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems mit Hilfe des Ansatzes

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} \qquad a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}.$$

d) Zeigen Sie, dass die Randwertaufgabe für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist.

Lösung:

a)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$$

mit $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} 8t+3 \\ -16t-6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

und

$$\mathbf{B}_0\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}_1\,\mathbf{x}(1) = \mathbf{d}$$

mit

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

b) Lösung des homogenen Systems:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 10 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-3-\lambda)-30 = \lambda^2+5\lambda-24 = (\lambda+8)(\lambda-3)$$

$$\text{also} \qquad \lambda_1 = -8, \qquad \lambda_2 = 3\,.$$

$\underline{\lambda = -8:}$ $\quad \begin{pmatrix} -2+8 & 3 \\ 10 & -3+8 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad 2v_1 = -v_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 3:}$ $\begin{pmatrix} -2-3 & 3 \\ 10 & -3-3 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad 5w_1 = 3w_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Homogene Lösung:

$$\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & e^{-8t} \\ 5e^{3t} & -2e^{-8t} \end{pmatrix} \mathbf{c}$$

c) **Lösung über speziell. Ansatz:**

Setzt man den Ansatz $x_p(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}$ in das System ein, so folgt:

$$\begin{aligned} a &= -2at - 2b + 3ct + 3d + 8t + 3 \\ c &= 10at + 10b - 3ct - 3d - 16t - 6 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} a &= -2b + 3d + 3 \\ 2a &= 3c + 8 \\ c &= 10b - 3d - 6 \\ 10a &= 3c + 16 \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned} 8a &= 8 \Longleftrightarrow a = 1 \Longrightarrow c = -2 \\ 2b &= 3d + 2 \\ 10b &= 3d + 4 \Longleftrightarrow 8b = 2 \Longrightarrow b = \frac{1}{4} \Longrightarrow d = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{4} \\ -2t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Altenativ : Variation der Konstanten

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}(t) \qquad \text{“Variation der Konstanten”}$$

$$\mathbf{X}(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{h}(t) \qquad \text{also} \qquad \begin{pmatrix} 3e^{3t} & e^{-8t} \\ 5e^{3t} & -2e^{-8t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{rcl} I \ : \ 3e^{3t}c_1'(t) + e^{-8t}c_2'(t) & = & 8t + 3 \\ II \ : \ 5e^{3t}c_1'(t) - 2e^{-8t}c_2'(t) & = & -16t - 6 \\ 2I + II \ : \qquad 11e^{3t}c_1'(t) & = & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow c_1'(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_1(t) = konst.$$

$$\Rightarrow e^{-8t} c_2'(t) = 8t + 3 \qquad \Rightarrow c_2'(t) = (8t+3)e^{8t} \qquad \Rightarrow$$

$$c_2(t) = \int (8t+3)e^{8t} = \int 8te^{8t} + \int 3e^{8t} = te^{8t} - \int e^{8t} + 3\int e^{8t} = (t+\frac{1}{4})e^{8t}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & e^{-8t} \\ 5e^{3t} & -2e^{-8t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (t+\frac{1}{4})e^{8t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+\frac{1}{4} \\ -2t-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d) Die RWA ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{E} := \mathbf{B}_0\,\mathbf{X}(0) + \mathbf{B}_1\,\mathbf{X}(1)$ ist regulär.

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^3 & e^{-8} \\ 5e^3 & -2e^{-8} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2e^3 & 3e^{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ -2e^3 & 3e^{-8} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{E}$ ist regulär.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung mit Hilfe eines integrierenden Faktors von der Form $m = m(t)$

$$2t^2 + 2ty^2 + 1 + 2yy' = 0.$$

Hinweis: Das gesuchte Potential hat die Gestalt $\Phi(t, y) = (p(t) + q(y))\, e^{t^2}$, p, q Polynome.

Lösung: Setze $g := 2t^2{+}2ty^2{+}1$ und $h := 2y$. Man verwende den Lösungsansatz aus dem Lehrbuch oder leite her:

$$(mg)_y = (mh)_t \Longleftrightarrow m_y g + g_y m = m_t h + m h_t$$

Also

$$m_t = \frac{m(g_y - h_t)}{h} = \frac{m(4ty - 0)}{2y} = 2mt \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}m}{m} = 2t\mathrm{d}t$$

Also ist $m(t) = \exp{(t^2)}$ ein integrierender Faktor.

Nun sucht man eine Funktion Φ mit

$$\Phi_t = (2t^2 + 2ty^2 + 1)e^{t^2} \qquad \text{und}$$
$$\Phi_y = 2ye^{t^2}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$\Phi(t, y) = y^2 e^{t^2} + c(t).$$

Damit gilt

$\Phi_t = 2ty^2\, e^{t^2} + \dot{c}(t)$. Also $\dot{c}(t) = (2t^2 + 1)\, e^{t^2}$.

Setzt man den Ansatz $c(t) = (at + b)\, e^{t^2}$ ein, so folgt

$$a + 2at^2 + 2bt = 2t^2 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 0,\ a = 1,\ c(t) = te^{t^2}$$

Alternativ: partielle Integration

$$c(t) = \int \exp{(t^2)}(2t^2 + 1)\mathrm{d}t = te^{t^2} - \int 1 \cdot e^{t^2}\mathrm{d}t + \int 1 \cdot e^{t^2}\mathrm{d}t.$$

Also mit $\Phi(t, y) = (t\ +\ y^2)\, e^{t^2} = k,\ k \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \pm\sqrt{ke^{-t^2} - t}\,\cdot$$