**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2004/05**
Prof. Dr. H. J. Oberle

# Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 3

**Aufgabe 8:**

a) Bestimmen Sie eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) + y(t) + (y(t))^{2/3} = 0, \qquad y(0) = 1.$$

b) Zeigen Sie, dass diese Lösung im Bereich $0 \le t \le 3\ln 2$ eindeutig bestimmt ist (Satz von Picard, Lindelöf).

c) Zeigen Sie, dass die Lösung der obigen Anfangswertaufgabe in Bereichen $0 \le t \le b$ mit $b > 3\ln 2$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist. Geben Sie eine zweite Lösung an.

**Aufgabe 9:** Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = t\,y + t, \qquad y(0) = 1.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Eulerschen Polygonzug-Verfahrens (21.1.5) mit der Schrittweite $h = 0.2$ eine Näherung für $y(1)$. Verwenden Sie zum Vergleich das Verfahren von Runge–Kutta (24.2.10) und (24.2.14) mit gleicher Schrittweite.

b) Führen Sie drei Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation (21.1.11) aus. Welchen Wert hat $y^{[3]}(t)$ an der Stelle $t = 1$?

c) Lösen Sie die gegebene Anfangswertaufgabe analytisch und berechnen Sie den exakten Wert y(1).

**Aufgabe 10:** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden linearen Differentialgleichungssystems für $t > 0$

$$\begin{aligned} 2\,t\;\dot{x}_1 &= x_1 + t\,x_2 \\ 2\,t^2\,\dot{x}_2 &= x_1 - t\,x_2. \end{aligned}$$

*Hinweis:* Reduktion der Ordnung; eine spezielle Lösung lässt sich mit Hilfe des Polynomansatzes $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$ erhalten.

**Aufgabe 11:** Ermitteln Sie die Lösung der folgenden linearen Anfangswertaufgabe

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4\,t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Abgabetermine:** 29.11. – 3.12.2004 **vor** der Übung.