Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2004/05**
Prof. Dr. H. J. Oberle

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist und bestimmen Sie ihre allgemeine Lösung

$$(5\,t^2 \;+\; 7\,y^2) \;+\; (14\,t\,y \;+\; \cos y)\,y' \;=\; 0.$$

b) Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung einen integrierenden Faktor der Form $m = m(t \cdot y)$ besitzt und bestimmen Sie die allgemeine Lösung

$$y \;-\; \frac{2\,y^2}{t} \;+\; 2\,y\,y' \;=\; 0.$$

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' \;=\; 2\,t\,y \;+\; 3\,t^2 \;+\; 1.$$

Verwenden Sie dabei zur Lösungsdarstellung die Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(t) \;:=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2}\,dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

b) Bestimmen Sie den Anfangswert $y(0) = y_0$ so, dass der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} y(t)/t$ für die Lösung $y(t)$ aus a) endlich ist. Wie lautet der Grenzwert?

Hinweis: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \;=\; \sqrt{\pi}/2\,.$,

c) Skizzieren Sie die Lösung y aus b) im Bereich $-1 \le t \le 5$ (MATLAB).

Aufgabe 6:

Ermitteln Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

a) $(1 - y)\,y'' + 2\,(y')^2 = 0,$

b) $y'' = y^{-3},$

c) $t\,y'' = y' \ln(y'/t), \qquad t > 0.$

Aufgabe 7:

a) Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ hat die folgende Poissongleichung im $\mathbb{R}^3$

$$\Delta\,u = 1$$

eine radialsymmetrische Lösung $u = u(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, die die Randbedingungen

$$u(1) - u(2) = 0, \qquad u'(1) - u'(2) = a$$

erfüllt? Geben Sie die Lösungen an.

b) Bestimmen Sie die stationäre und radialsymmetrische Temperaturverteilung in einer homogenen Kugelschale mit Innenradius r_i, Außenradius r_a, Innentemperatur T_i und Außentemperatur T_a.

Abgabetermine: 15.11. – 19.11.2004 **vor** der Übung.