Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

Die Luft eines Raumes der Größe $50\,\text{m} \times 17.5\,\text{m} \times 4\,\text{m}$ besitze zur Zeit $t = 0$ einen CO_2–Gehalt von 0.2%. Ein Ventilator befördert $4.2\ \text{m}^3/\text{s}$ Frischluft in den Raum, Diese habe einen CO_2–Gehalt von 0.05%.

Berechnen Sie den CO_2–Gehalt der Raumluft nach 20 Minuten.

Aufgabe 2:

Ermitteln Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung.

a) *Trennung der Variablen:*

$$\begin{aligned}(t^2+1)\,y' &= y^2+1,\\ \frac{m}{c}\,\dot{v} + v^2 &= \frac{mg}{c} \quad \text{mit } m,g,c>0,\end{aligned}$$

b) *Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen:*

$$\begin{aligned}t\,y' &= t-y,\\ t^2\,y' &= t\,y - y^2,\end{aligned}$$

c) *Lineare Differentialgleichungen:*

$$\begin{aligned}y' &= -2\,t\,y + t\,\mathrm{e}^{-t^2},\\ y' &= -y + 2\,t + 2,\\ y' &= y + \cos t.\end{aligned}$$

Aufgabe 3:

a) Lösen Sie die Gleichung des logistischen Wachstums

$$N'(t) \;=\; \lambda\, N(t)\,(K \,-\, N(t))$$

über den Lösungsweg für Bernoullische Differentialgleichungen. Bestätigen Sie hiermit die Lösungsdarstellung in (20.1.9).

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$y' \;=\; -y^2 \;+\; \frac{2}{t^2}.$$

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist und bestimmen Sie ihre allgemeine Lösung

$$(5\,t^2 \,+\, 7\,y^2) \;+\; (14\,t\,y \,+\, \cos y)\,y' \;=\; 0.$$

b) Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung einen integrierenden Faktor der Form $m = m(t \cdot y)$ besitzt und bestimmen Sie die allgemeine Lösung

$$y \;-\; \frac{2\,y^2}{t} \;+\; 2\,y\,y' \;=\; 0.$$

Abgabetermine: 1.11. – 5.11.2004 **vor** der Übung.