Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y + \frac{e^t}{y^2} + 3ty' = 0, \qquad y(2) = \left(\frac{-e^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{für } t \geq 2\,.$$

Hinweis: Es gibt einen integrierenden Faktor der Form $m(y)$.

b) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -5y_1(t) + 3y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= -6y_1(t) + 4y_2(t). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Art des stationären Punktes $y^* = (0,0)^T$.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= w \\ \dot{w} &= 2u - v + 2w. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit

$$u(0) = 0,\ v(0) = 1,\ w(0) = 5$$

.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems aus a) mit der Inhomogenität $h(t) = (0, 0, e^t)$.

Hinweise:

- Die Verwendung eines geeigneten Ansatzes für eine spezielle Lösung der inhomogenen Aufgabe erspart viel Arbeit.
- Falls Sie keinen speziellen Ansatz verwenden, könnten die folgenden Integrale auftreten:

$$\int e^t \sin t\, dt = \frac{1}{2}\,(\sin t - \cos t)e^t$$

$$\int e^t \cos t\, dt = \frac{1}{2}\,(\sin t + \cos t)e^t$$