Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2002/03**
Prof. Dr. Jens Struckmeier
Jochen Merker

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 1:

Prüfen Sie, ob die folgenden Randwertaufgaben eindeutig lösbar sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls direkt die eindeutige Lösung, ohne Greensche Funktionen zu verwenden.

a) $y'' = 2 \;,\; y(0) = 1 \;,\; y'(2) = 2 \;.$

b) $y'' + 2y' + y = 2\cos(x) \;,\; y(0) = y(1) \;,\; y'(0) + 2y(1) = 1$

Hinweis: Um die Randwertaufgabe $y' = Ay + h$, $Ry = d$, direkt zu lösen, bestimme man ein Fundamentalsystem Y zur homogenen DGL $y' = Ay$, finde (z.B. mittels eines geeigneten Ansatzes) eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen DGL $y' = Ay + h$ und ermittele abschließend den Koeffizientenvektor c aus der Randwertgleichung $R(Yc + y_p) = d$.

Aufgabe 2:

Weisen Sie für das Randwertproblem $y'' = \sin(x)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, die eindeutige Lösbarkeit nach, bestimmen Sie die Greensche Funktion und damit die Lösung der Randwertaufgabe.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie zu vorgegebenen $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ die das Integral $I[y] := \int_a^b -y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2}dx$ minimierende Funktion $y(x)$ unter den Randbedingungen $y(a) = 0$ und $y(b) = 0$, indem Sie z.B. die Gleichung $H = -c$ für die Hamilton-Funktion H zu $I[y]$ nutzen. Eine implizite Darstellung der minimierenden Funktion $y(x)$ reicht dabei aus.

Hinweis: Substituieren Sie $z = y - c$ in der Gleichung $H = -c$. Die dann entstehende Differentialgleichung hat die Form $zz' = g(z^2)$ und kann aufgrund von $zz' = (\frac{1}{2}z^2)'$ durch die Substitution $u := z^2$ in $\frac{1}{2}u' = g(u)$ überführt werden.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Randwertaufgabe

$$x^2y'' - xy' + (1 + \lambda^2)y = 0 \qquad y(1) = 0 \qquad y(e) = 0 \quad .$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Randwertaufgabe, die sich für $u(t) := y(e^t)$ aus der ursprünglich gegebenen Aufgabe ergibt, und diskutieren Sie das Eigenwertproblem bei der dadurch entstandenen Gleichung für u. Übertragen Sie anschließend die Ergebnisse zurück.

Abgabetermine: 27.01.-31.01.2003