Fachbereich Mathematik **WS 2001/2002**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I

6. Übung

Aufgabe 21:

Bestimmen Sie die Greensche Funktion des linearen Randwertproblems zweiter Ordnung

$$y''(t) \;-\; \frac{2}{t}\,y'(t) \;+\; \frac{2}{t^2}\,y(t) \;=\; h(t), \quad 1 \le t \le 2$$
$$y(1) \;=\; 0, \quad y(2) \;-\; y'(2) \;=\; 0$$

und lösen Sie hiermit die Randwertaufgabe für $h(t) \;:=\; t$.

Hinweis: Die homogene Differentialgleichung besitzt polynomiale Lösungen.

Aufgabe 22:

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenfunktionen des linearen Randwertproblems

$$y''(t) \;=\; \lambda\, y(t)/t^2, \qquad y(1) \;=\; y(2) \;=\; 0.$$

Hinweise: Die Differentialgleichung besitzt polynomiale Lösungen, $t^{\alpha+i\beta} = t^\alpha\,(\cos(\beta\,\ln t) \;+\; i\,\sin(\beta\,\ln t))$.

Aufgabe 23:

a) Zeigen Sie, dass das modifizierte Euler–Verfahren

$$Y_{j+1} \;:=\; Y_j \;+\; h_j\, f(t_j + \frac{h_j}{2}, Y_j \;+\; \frac{h_j}{2}\, f(t_j, Y_j))$$

die Ordnung $p = 2$ besitzt.

b) Untersuchen Sie das Mehrschrittverfahren

$$Y_{j+2} \;=\; Y_j \;+\; \frac{h_j}{6}\,(f_{j+2} + 10 f_{j+1} + f_j)$$

auf starke bzw. schwache Stabilität und bestimmen Sie die Ordnung des Verfahrens.

Aufgabe 24:

Gegeben sei die Randwertaufgabe: $y'' = (y')^2, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = \ln 10.$

a) Bestimmen Sie (analytisch) die Lösung $y(t,s)$ der zugehörigen Anfangswertaufgabe $y'' = (y')^2$, $y(-1) = 0$, $y'(-1) = s$ und die Singularität t_∞ dieser Lösung. Für welche Werte s liegt t_∞ im Intervall $]-1,1]$?

b) Berechnen Sie s^*, so dass $y(t,s^*)$ die Randwertaufgabe löst.

c) Bei Verwendung des einfachen Schießverfahrens ist das folgende Nullstellenproblem (numerisch) zu lösen

$$F(s) \; := \; y(1,s) - \ln 10 \; = \; 0.$$

Bestimmen Sie alle Startwerte s_0, für die das Newton–Verfahren $s_{j+1} = s_j - F(s_j)/F'(s_j)$ eine gegen s^* konvergente Folge liefert.

Termin: 28.1. – 1.2.2002