Fachbereich Mathematik **WS 2001/2002**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I

5. Übung

Aufgabe 17: In einem Zweipopulationenmodell (Räuber–Beute–Modell) bezeichne $x(t)$ die Population der Beutespezies, $y(t)$ die der Räuberspezies zur Zeit t. Das zeitliche Wachstum der Populationen werde durch das folgende Differentialgleichungssystem beschrieben

$$\begin{aligned} x' &= x\,(4 - x - y) \\ y' &= y\,(-2 + x - y). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte dieses Systems und untersuchen Sie diese auf ihre Stabilität.

Aufgabe 18:

a) Die Differentialgleichung des gedämpften mathematischen Pendels lautet

$$\ddot{\Phi} = -\,\omega^2 \sin\Phi - 2\,c\,\dot{\Phi}.$$

Dabei seien $\omega,\ c > 0$.

Untersuchen Sie die Gleichgewichtslage $\Phi_0 = 0$ auf Stabilität. Wenden Sie dazu den Stabilitätssatz III des Lehrbuches an. Zeigen Sie ferner, dass durch $V(\Phi, \dot{\Phi}) := 0.5\,\dot{\Phi}^2 + \omega^2\,(1 - \cos\Phi)$ eine Ljapunov–Funktion gegeben ist. Welche Folgerung ergibt sich hiermit aus dem Stabilitätssatz IV ?

b) Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -\,x^3 - 2\,x\,y^2 \\ y' &= x^2\,y - y^3 \end{aligned}$$

besitzt die Gleichgewichtslage $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Welche Aussage liefert hierfür der Stabilitätssatz III? Zeigen Sie, dass durch $V(x,y) := x^2 + x^2y^2 + y^4$ eine Ljapunov–Funktion gegeben ist und wenden Sie den Stabilitätssatz IV an.

Aufgabe 19: Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} x_1' &= 7\,x_1 + 4\,x_3, & x_1(0) - x_1(b) &= 2 \\ x_2' &= 8\,x_1 + 3\,x_2 + 8\,x_3, & x_2(0) + 2\,x_2(b) &= -1 \\ x_3' &= -8\,x_1 - 5\,x_3, & x_3(0) - x_3(b) &= 1 \end{aligned}$$

Formulieren sie das Randwertproblem in Matrixschreibweise und bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems. Für welche Werte $b \neq 0$ ist die Randwertaufgabe eindeutig lösbar ?

Aufgabe 20:

a) Bestimmen Sie eine C^1–Funktion $y_0 \in \mathrm{C}^1[0,9]$ mit $y_0(1) = y_0(9) = 3$, die das Funktional

$$I[y] := \int_1^9 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}\,dt$$

minimiert und berechnen Sie den minimalen Wert des Zielfunktionals.

b) Welche Lösung erhält man, wenn die Randbedingung $y_0(9) = 3$ weggelassen wird? Wie lautet nun der minimale Wert des Zielfunktionals?

Termin: 14.1. – 18.1.2002