Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2000/01**
Priv. Doz. Dr. I. Gasser
F. Pfäffle

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 25:
Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Randwertaufgaben:

a) $y'' + y = 1 + x^2, \quad 0 \le x \le \pi, \quad y(0) = 1,\, y(\pi) = -1,$

b) $y'' + y = 1 + x^2, \quad 0 \le x \le \pi, \quad y(0) = 1,\, y(\pi) + y'(\pi) = 0,$

c) $y'' + y = 1 + x^2, \quad 0 \le x \le \pi, \quad y(0) = 1,\, y(\pi) = \pi^2 - 3.$

Aufgabe 26:
Lösen Sie für $0 \le t \le 1$ die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t}$$

mit den Randbedingungen $y(0) = \dot{y}(0)$ und $\dot{y}(1) = 0$.

Aufgabe 27:

a) Ermitteln Sie die Eigenwerte und die Eigenfunktionen des Problems

$$-\ddot{y} + 4y = \lambda y \quad \text{für} \quad 0 \le t \le 2$$

mit den Randbedingungen $\dot{y}(0) = 0$ und $y(2) = 0$.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenfunktionen der Randwertaufgabe

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \frac{\lambda}{x^2} y(x) = 0, \qquad y'(1) = 0, \quad y'(e^{2\pi}) = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = x^{\alpha}$.

Aufgabe 28:
Gegeben sei eine Funktion $r : [0,1] \to \mathbb{R}$, die nur negative Werte annimmt. Die Funktion y löse die Differentialgleichung
$$\ddot{y} - y = r \quad \text{auf} \quad [0,1]$$
mit den Randwerten $y(0) = y(1) = 0$.

Zeigen Sie: Für $0 \leq t \leq 1$ ist $y(t) > 0$.

Hinweis: Der Standard-Zugang zu dieser Aufgabe wäre die Darstellung mit einer Greenschen Funktion. Man kann die Aussage aber auch ohne dieses Hilfmittel zeigen.

Abgabetermin: 29.1.-2.2.