**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2000/01**
Priv. Doz. Dr. I. Gasser
R. Weber

# Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 6

**Aufgabe 21:** Räuber–Beute–Modell

Wir betrachten ein Zweipopulationenmodell, wobei $x(t)$ die Population der Beutespezies zur Zeit $t$ und $y(t)$ die Population der Räuberspezies zur Zeit $t$ sei (z.B. Karpfen–Hechte). Das Wachstum der beiden Populationen kann z.B. durch ein Differentialgleichungssystem der Form

$$\dot{x} = (\alpha - \beta y - \lambda x)x, \quad \dot{y} = (-\gamma + \delta x - \mu y)y$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu > 0$ modelliert werden. Bestimmen Sie für $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ alle Gleichgewichtspunkte und untersuchen Sie diese auf ihre Stabilität.

**Aufgabe 22:**

a) Betrachten Sie die Differentialgleichung des gedämpften mathematischen Pendels

$$\ddot{\varphi} = -c\dot{\varphi} - \omega^2 \sin\varphi,$$

wobei $c > 0$ sei, und untersuchen Sie die Stabilität der Gleichgewichtslage $\varphi = 0$,

(i) indem Sie den Stabilitätssatz III des Lehrbuchs verwenden,

(ii) indem Sie nachweisen, dass $V(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \omega^2(1 - \cos\varphi)$ eine Ljapunov–Funktion ist, und Stabilitätssatz IV des Lehrbuchs verwenden.

b) Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = -x^3 - 2xy^2, \quad \dot{y} = x^2 y - y^3$$

und untersuchen Sie die Stabilität der Gleichgewichtslage $(x, y) = (0, 0)$,

(i) indem Sie den Stabilitätssatz III des Lehrbuchs verwenden,

(ii) indem Sie nachweisen, dass $V(x, y) = x^2 + x^2y^2 + y^4$ eine Ljapunov–Funktion ist, und Stabilitätssatz IV des Lehrbuchs verwenden.

**Aufgabe 23:**

Formulieren Sie das Randwertproblem

$$\begin{array}{rlrl} \dot{x} = & 7x + 4z, & x(0) - x(b) = & 2, \\ \dot{y} = & 8x + 3y + 8z, & y(0) + 2y(b) = & -1, \\ \dot{z} = & -8x - 5z, & z(0) - z(b) = & 1 \end{array}$$

in Matrizenschreibweise und bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems. Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist die Randwertaufgabe eindeutig lösbar? Ermitteln Sie im Falle der nichteindeutigen Lösbarkeit alle Lösungen.

**Aufgabe 24:**

Bestimmen Sie eine $C^1$–Funktion $y = y_0$ mit $y_0(1) = y_0(9) = 3$, die das Funktional

$$I[y] = \int_1^9 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dt$$

minimiert. Berechnen Sie auch den minimalen Wert von $I$.

**Abgabetermin:** 15.1.-19.1.