Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2000/01**
Priv. Doz. Dr. I. Gasser
N. Lehmkuhl

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Ein Tank K_1 enthalte 100 Liter Wasser, in dem 5 kg Salz aufgelöst sind, ein Tank K_2 300 Liter Wasser mit 5 kg Salz. Beginnend mit der Zeit $t_0 = 0$ werden pro Minute ständig 10 Liter Salzlösung von K_1 nach K_2 und 10 Liter von K_2 nach K_1 gepumpt (und sofort verrührt). Wie groß ist der Salzgehalt $m_i(t)$ in K_i zur Zeit $t > 0$? Auf welchem Niveau stabilisiert sich schließlich der Salzgehalt in K_i?

Aufgabe 14:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} 2\,t\,\dot{x}_1 & = & x_1 + t x_2 \\ 2\,t^2 \dot{x}_2 & = & x_1 - t x_2 \end{array} \qquad (t > 0).$$

Hinweis: Mit dem Polynomansatz $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$ erhalten Sie eine spezielle Lösung.

Aufgabe 15:

Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Wählen Sie die auftretenden Eigenvektoren mit ganzzahligen Komponenten minimaler Größe.

Aufgabe 16: (Klausuraufgabe)

Es sei

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme ein Fundamentalsystem des homogenen Differentialgleichungssystems.
b) Man bestimme (tunlichst unter Vermeidung der Methode der Variation der Konstanten, sondern durch geeigneten Ansatz) eine partikuläre Lösung des inhomogenen und damit dann die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems.
c) Bestimmen Sie die (reelle) Lösung zum Anfangsvektor

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Abgabetermin: 4.12.-8.12.