Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2000/01**
Priv. Doz. Dr. I. Gasser
Wernt Hotzel

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Man gebe für die folgenden Differentialgleichungen implizite Lösungen an:

$$\frac{1}{x} + ye^x + \left(\frac{1}{\tan y} + e^x\right) y' = 0\,, \qquad x > 0$$

$$e^x \cos y + y^2 \cos x + (2y \sin x - e^x \sin y)y' = 0$$

Aufgabe 10:

Man gebe für die Differentialgleichung

$$(y + y') \cos x = y \sin x + x(x+2) \sin y + x^2 y' \cos y$$

eine implizite Lösung an!
(Hinweis: Integrierender Faktor)

Aufgabe 11:

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *global Lipschitz–stetig*, wenn es eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \tag{1}$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *lokal Lipschitz–stetig*, wenn es zu jedem Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass Gleichung **??** für alle $x_1, x_2 \in Q$ gilt.

a) Man skizziere den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig, aber nicht lokal Lipschitz-stetig ist.

b) Man skizziere den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die lokal Lipschitz-stetig, aber nicht stetig differenzierbar ist.

c) Man skizziere den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig differenzierbar, aber nicht global Lipschitz-stetig ist.

d) Man skizziere den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die global Lipschitz-stetig, aber nicht stetig differenzierbar ist.

Man beweise die folgenden Aussagen, oder gebe ein explizites Gegenbeispiel an:

e) Jede lokal Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.

f) Jede lokal Lipschitz-stetige Funktion ist stetig differenzierbar.

g) Jede global Lipschitz-stetige Funktion ist lokal Lipschitz-stetig.

h) Jede stetig differenzierbare Funktion ist lokal Lipschitz–stetig. (Hinweis: Man verwende Satz 17.3.5 aus Ansorge/Oberle)

Man formuliere den Satz von Picard–Lindelöf unter Verwendung des Begriffs der Lipschitz-Stetigkeit!

Aufgabe 12:

Ein zylindrischer Eimer mit der Grundfläche A ist bis zur Höhe H mit Wasser gefüllt. Im Boden befindet sich ein Loch der Fläche D, das mit einem Korken verschlossen ist.

a) Man leite für die Wasserhöhe $h(t)$ die Bewegungsgleichung

$$\dot{h}^2 = k^2 \cdot h$$

her. Wie hängt k von A, D und der Erdbeschleunigung g ab? (Hinweis: Energieerhaltungssatz. Wie groß ist die potentielle Energie des Wassers im Eimer zu den Zeiten t und $t + \Delta t$? Wo bleibt die Energiedifferenz? Wie groß ist die Ausströmgeschwindigkeit im Verhältnis zu $\dot{h}$?)

b) Was liefert der Satz von Picard–Lindelöf?

c) Man gebe alle mathematisch möglichen Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{h}^2 = k^2 \cdot h$$

an. Man skizziere verschiedene Lösungen.

d) Man löse die AWA für den konkreten Fall, dass der Stöpsel genau um 16:00 gezogen wird. Wie hoch ist der Wasserstand im Eimer um 16:05, 16:30, 17:00, 18:00, 19:00? Wann ist der Eimer leer? Man verwende die Werte: H=40cm, Radius des Eimers=30cm, Radius des Lochs=0,2cm sowie g=10m/s.

Abgabetermin: 20.11. - 24.11.