

### Tangentialebene:

Die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0)$$

liegen **tangential** an die Fläche  $F$ .

Sie spannen die **Tangentialebene**  $T_{\mathbf{x}^0}F$  an die Fläche  $F$  im Punkt  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}(\mathbf{u})$  auf.

Die Tangentialebene hat die Parameterdarstellung

$$T_{\mathbf{x}^0}F : \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) + \mu \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

### Frage:

Wie kann ich den Flächeninhalt einer gegebenen Fläche  $F$  berechnen?

166

### Definition:

Sei  $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Parameterdarstellung einer Fläche, und sei  $K \subset D$  kompakt, messbar und zusammenhängend.

Dann wird der Flächeninhalt von  $\mathbf{p}(K)$  definiert durch das

### Oberflächenintegral

$$\int_{\mathbf{p}(K)} d\sigma := \int_K \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| d\mathbf{u}$$

Dabei nennt man den Term

$$d\sigma := \int_K \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| d\mathbf{u}$$

auch das **Oberflächenelement** der Fläche  $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ .

Das Oberflächenintegral ist insbesondere **unabhängig** von der speziellen Parametrisierung der Fläche. Dies folgt aus dem Transformationsatz.

167

**Beispiel:**

Für die Mantelfläche des Zylinders  $Z = \mathbf{p}(K)$  mit

$$K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$$

erhält man wegen

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \right\| = r$$

den Wert

$$O(Z) = \int_Z do = \int_K rd(\varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^H rdz d\varphi = 2\pi rH$$

168

**Beispiel:**

Ist die Fläche der Graph einer skalaren Funktion, d.h.  $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$ , so gilt für die zugehörigen Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{x_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_{x_1} \\ -\varphi_{x_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\| = \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2}$$

und

$$\begin{aligned} O(\mathbf{p}(K)) &= \int_{\mathbf{p}(K)} do \\ &= \int_K \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2} d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

169

**Beispiel:**

Wir berechnen die Oberfläche des Paraboloids  $P$  gegeben durch

$$P := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 2 - x_1^2 - x_2^2, x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} O(P) &= \int_{x_1^2 + x_2^2 \leq 2} \sqrt{1 + 4x_1^2 + x_2^2} \, d(x_1, x_2) \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, d\varphi \, dr = \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4s} \, ds \\ &= \pi \left[ \frac{1}{6} (1 + 4s)^{3/2} \right]_0^2 = \pi \left( \frac{1}{6} (27 - 1) \right) = \frac{13}{3} \pi \end{aligned}$$

170

**Bemerkung:**

Für das Kreuzprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2$$

Daraus folgt

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\rangle^2$$

Definiert man

$$E := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2, \quad F := \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\rangle^2, \quad G := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2,$$

so ergibt sich die Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2} \, d(u_1, u_2)$$

171

**Beispiel:**

Für das Flächenelement der Kugel

$$S_r^2 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

erhalten sich mit der Parametrisierung über Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

die Beziehungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$E = r^2 \cos^2 \theta, \quad F = 0, \quad G = r^2$$

172

**Beispiel:** (Fortsetzung)

Aus der Beziehung

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} d(u_1, u_2)$$

folgt daher

$$d\sigma = r^2 \cos \theta d(\varphi, \theta), \quad (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Wir können nun die Oberfläche der Kugel berechnen:

$$\begin{aligned} O &= \int_{S_r^2} d\sigma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta d\varphi d\theta \\ &= 2\pi r^2 \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

173

**Definition:**

Sei  $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Parametrisierung einer Fläche  $F = \mathbf{p}(K)$ ,  $K \subset D$  kompakt, messbar und zusammenhängend.

1) Für eine stetige Funktion  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  definiert man das

**Oberflächenintegral 1. Art** durch

$$\int_F f(\mathbf{x}) \, d\sigma := \int_K f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| \, d\mathbf{u}$$

2) Für ein stetiges Vektorfeld  $\mathbf{f} : F \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert man das

**Oberflächenintegral 2. Art** durch

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma := \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle \, d\mathbf{u}$$

174

**Andere Darstellungen des Oberflächenintegrals 2. Art**

Der Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  auf der Fläche  $F$  ist gegeben durch

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \frac{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\|}$$

Wir schreiben daher auch

$$\begin{aligned} \int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma &= \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle \, d\mathbf{u} \\ &= \int_K \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \rangle \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| \, d\mathbf{u} \\ &= \int_F \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle \, d\sigma \end{aligned}$$

175

## Bemerkung:

### 1) Physikalische Interpretation der Oberflächenintegrale:

Ist  $\rho(\mathbf{x})$  die Dichte einer massenbelegten Fläche, so liefert das Integral 1. Art gerade die Gesamtmasse der Fläche.

Ist  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  ein Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung, so liefert das Integral 2. Art die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche  $F$  strömt, d.h. den **Fluss** von  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  durch die Fläche  $F$ .

2) Ist  $F$  eine geschlossene Fläche, d.h. die Oberflächen eines kompakten und einfach zusammenhängenden Körpers im  $\mathbb{R}^3$ , so schreiben wir wiederum

$$\oint_F f(\mathbf{x}) d\sigma \quad \text{bzw.} \quad \oint_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\sigma$$

Die Parametrisierung ist dabei so gewählt, dass der Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  nach außen weist.

176

## Satz: (Integralsatz von Gauß)

Sei  $G \subset \mathbb{R}^3$  ein kompakter und messbarer Standardbereich, d.h.  $G$  sei bezüglich jeder Koordinate projizierbar. Der Rand  $\partial G$  bestehe aus endlich vielen glatten Flächenstücken mit äußerer Normale  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ .

Ist  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dann ein  $\mathcal{C}^1$ -Vektorfeld mit  $G \subset D$ , so gilt

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\sigma$$

## Interpretation:

Die linke Seite ist ein Bereichsintegral über die skalare Funktion  $g(\mathbf{x}) := \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Die rechte Seite ist ein Oberflächenintegral 2. Art bezüglich des Vektorfeldes  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Ist  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  das Geschwindigkeitsfeld einer **inkompressiblen** Strömung, so gilt  $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$  und daher

$$\oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\sigma = 0$$

177

**Beispiel:**

Wir betrachten das Vektorfeld  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  und die Kugel  $K$ :

$$K := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$$

Dann gilt offensichtlich

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3$$

und damit

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 3 \cdot \operatorname{vol}(K) = 4\pi$$

Das entsprechende Oberflächenintegral lässt sich am besten durch Übergang auf Kugelkoordinaten, d.h. die Parametrisierung der Kugel durch Kugelkoordinaten, berechnen.

178

**Satz:** (Formeln von Green)

Die Menge  $G \subset \mathbb{R}^3$  erfülle die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes. Für  $\mathcal{C}^2$ -Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subset D$ , gelten dann die Relationen:

$$\begin{aligned} \int_G (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) \, d\mathbf{x} &= \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma \\ \int_G (f \Delta g - g \Delta f) \, d\mathbf{x} &= \oint_{\partial G} \left( f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) \, d\sigma \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{n}} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G$$

die Richtungsableitung von  $f(\mathbf{x})$  in Richtung des äußeren Einheitsnormalenvektors  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ .

179

**Beweis:** Wir setzen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x})$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_3} \right) \\ &= f \cdot \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Gaußschen Integralsatz an:

$$\begin{aligned} \int_G (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) dx &= \int_G \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dx = \oint_{\partial G} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle do \\ &= \oint_{\partial G} f \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle do = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} do \end{aligned}$$

Die zweite Greensche Formel folgt direkt durch Vertauschen von  $f$  und  $g$ .

180

**Satz:** (Integralsatz von Stokes)

Sei  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Vektorfeld auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^3$ . Weiter sei  $F = \mathbf{p}(K)$  eine Fläche in  $D$ ,  $F \subset D$ , mit der Parametrisierung  $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ .

$K \subset \mathbb{R}^2$  sei ein Greenscher Bereich. Der Rand  $\partial K$  werde durch eine stückweise glatte  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $\mathbf{c}$  parametrisiert, deren Bild  $\tilde{\mathbf{c}}(t) := \mathbf{p}(\mathbf{c}(t))$  dann den Rand  $\partial F$  der Fläche  $F$  parametrisiert.

Die Orientierung der Randkurve  $\tilde{\mathbf{c}}(t)$  sei hierbei so gewählt, dass  $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{c}}(t)) \times \dot{\tilde{\mathbf{c}}}(t)$  in Richtung der Fläche weist.

Dann gilt

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) do = \oint_{\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dx$$

181

**Beispiel:**

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (-y, x, -z)^T$$

und die geschlossene Kurve  $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrisiert durch

$$c(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(c(t)), \dot{c}(t) \rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi \end{aligned}$$

182

**Beispiel:** (Fortsetzung)

Wir definieren nun eine Fläche  $F \subset \mathbb{R}^3$ , die durch die Kurve  $c(t)$  berandet wird:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} =: \mathbf{p}(\varphi, \psi)$$

mit  $(\varphi, \psi) \in K = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$ , d.h. die Fläche  $F$  ist gerade die obere Kugelhälfte.

Der Integralsatz von Stokes besagt nun:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o} = \oint_{c=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Wir haben bereits die rechte Seite, ein **Kurvenintegral 2. Art**, berechnet:

$$\oint_{c=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 2\pi$$

183

**Beispiel:** (Fortsetzung)

Es bleibt also das **Oberflächenintegral 2. Art:**

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma = \int_K \left\langle \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{p}(\varphi, \psi)), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \psi} \right\rangle d\varphi d\psi$$

**Beachte:** Die rechte Seite ist ein **Bereichsintegral**.

Man berechnet direkt, dass  $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (0, 0, 2)^T$  gilt und

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \psi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos^2 \psi \\ \sin \varphi \cos^2 \psi \\ \sin \psi \cos \psi \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2 \sin \psi \cos \psi \, d\varphi d\psi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin(2\psi) \, d\psi = 2\pi$$