**Satz:**

Ist $f(\mathbf{x})$ stetig auf einem Normalbereich

$$D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ a \le x \le b\ \wedge\ g(x) \le y \le h(x)\ \}$$

so gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy dx$$

**Bemerkung:**
Analoge Beziehungen gelten für höhere Dimensionen. Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine projizierbare Menge, so gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_B \left( \int_{\varphi(\tilde{\mathbf{x}})}^{\psi(\tilde{\mathbf{x}})} f(\mathbf{x}) dx_i \right) d\tilde{\mathbf{x}}$$



**Beispiel:** Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := x + 2y$$

Berechne das Integral über der durch zwei Parabeln begrenzten Fläche

$$D := \{(x,y)\ :\ -1 \le x \le 1\ \wedge\ x^2 \le y \le 2 - x^2\}$$

Die Menge $D$ ist ein Normalbereich und $f(x,y)$ ist stetig:

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y) d\mathbf{x} &= \int_{-1}^{1} \left( \int_{x^2}^{2-x^2} (x+2y) dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left[ xy + y^2 \right]_{x^2}^{2-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x(2-x^2) + (2-x^2)^2 - x^3 - x^4) dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-2x^3 - 4x^2 + 2x + 4) dx = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

**Beispiel:** Zu berechnen ist das Volumen des Rotationsparaboloids:

$$V := \{(x,y,z)^T \ : \ x^2+y^2 \le 1 \ \wedge \ x^2+y^2 \le z \le 1\}$$

Darstellung von $V$ als **Normalbereich**

$$V := \{(x,y,z)^T \quad : \quad -1 \le x \le 1 \ \ \wedge \ \ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \ \ \wedge \ \ x^2+y^2 \le z \le 1\}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \text{vol}(V) &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{1} dz dy dx = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2) dy dx \\ &= \ \ldots = \frac{4}{3} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{3/2} dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



**Integration über allgemeine Integrationsbereiche**

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte und messbare Menge.

Man nennt $Z = \{D_1, \ldots, D_m\}$ eine **allgemeine Zerlegung** von $D$, falls die Mengen $D_k$ kompakt, messbar und zusammenhängend sind und

$$\bigcup_{j=1}^{m} D_j = D \qquad \text{und} \qquad \forall\, i \ne j \ : \ D_i^0 \cap D_j^0 = \emptyset$$

gelten.

Ferner heißt

$$\text{diam}\, D_j := \sup\{\, \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \ : \ \mathbf{x},\mathbf{y} \in D\,\}$$

der **Durchmesser** der Menge $D_j$ und

$$\|Z\| := \max\{\, \text{diam}\, D_j \ : \ j = 1, \ldots, m\,\}$$

die **Feinheit** der allgemeinen Zerlegung $Z$.

**Riemannsche Summe** für allgemeine Zerlegungen:

Für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definiert man die Riemannschen Summen

$$R_f(Z) = \sum_{j=1}^{m} f(\mathbf{x}^j)\text{vol}(D_j)$$

mit beliebigen $\mathbf{x}^j \in D_j$, $j = 1, \ldots, m$.

**Satz:**

Für jede Folge $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ allgemeiner Zerlegungen von $D$ mit $\|Z_k\| \to 0$ (für $k \to \infty$) und für jede Folge zugehöriger Riemannscher Summen $R_f(Z_k)$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} R_f(Z_k) = \int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$



**Anwendungen** der Bereichsintegrale auf die Berechnung von Schwerpunkten oder Trägheitsmomenten von Flächen und Körpern.

**A) Schwerpunkt** einer Fläche oder eines Körpers:

**Definition:**

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) eine messbare Menge, $\rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$, eine vorgegebene Massendichte. Dann ist der Schwerpunkt der Fläche (bzw. des Körpers) $D$ gegeben durch

$$\mathbf{x}_s := \frac{\int_D \rho(\mathbf{x})\mathbf{x}d\mathbf{x}}{\int_D \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}}$$

Das Zählerintegral (über eine vektorwertige Funktion) ist hierbei koordinatenweise zu berechnen.

**Beispiel:** Zu berechnen ist der Schwerpunkt der Pyramide $P$:

$$P := \left\{ (x,y,z)^T \;:\; \max(|y|,|z|) \le \frac{ax}{2h}, \quad 0 \le x \le h \right\}$$

Unter der Annahme konstanter Dichte berechnen wir das Volumen von $P$:

$$\begin{aligned} \text{vol}\,(P) &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} dz dy dx \\ &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \frac{ax}{h} dy dx \\ &= \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \frac{1}{3} a^2 h \end{aligned}$$



**Beispiel:** (Fortsetzung)

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dz dy dx &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \begin{pmatrix} \frac{ax^2}{h} \\ \frac{axy}{h} \\ 0 \end{pmatrix} dy dx \\ &= \int_0^h \begin{pmatrix} \frac{a^2 x^3}{h^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} a^2 h^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt von $P$ liegt daher im Punkt $\mathbf{x}_s = (\frac{3}{4}h, 0, 0)^T$.

**B) Trägheitsmomente** von Flächen oder Körpern:

**Definition:** (Trägheitsmoment bezüglich einer Achse)

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) eine messbare Menge, $\rho(\mathbf{x})$ bezeichne für $\mathbf{x} \in D$ eine Massendichte und $r(\mathbf{x})$ den Abstand des Punktes $\mathbf{x} \in D$ von einer vorgegebenen Drehachse.

Dann besitzt $D$ bezüglich dieser Achse das Trägheitsmoment

$$\Theta_{\text{Achse}} := \int_D \rho(\mathbf{x}) r^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

**Beispiel:** Gegeben sei der homogene Zylinder $Z$:

$$Z := \left\{ (x,y,z)^T \ : \ x^2 + y^2 \leq r^2, -l/2 \leq z \leq l/2 \right\}$$

Wir berechnen das Trägheitsmoment bezüglich der $x$–Achse:

$$\Theta_{x\text{–Achse}} = \int_Z \rho(y^2 + z^2) d(x,y,z)$$

unter der Annahme konstanter Dichte $\rho$.



**Beispiel:** (Fortsetzung)

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Theta_{x\text{–Achse}} &= \rho \int_Z (y^2 + z^2) d(x,y,z) \\
&= \rho \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-l/2}^{l/2} (y^2 + z^2)\, dz dy dx \\
&= \rho \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (ly^2 + \frac{l^3}{12})\, dy dx \\
&= \rho \frac{\pi l r^2}{12} (3r^2 + l^2)
\end{aligned}$$

**Transformationssatz:**

Dies verallgemeinert die Substitutionsregel aus Analysis II

**Satz:**

Sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung. $D \subset U$ sei eine kompakte, messbare Menge, so dass $\Phi$ auf $D^0$ einen $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus bildet.

Dann ist auch $\Phi(D)$ kompakt und messbar, und für jede stetige Funktion $f : \Phi(D) \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int\limits_{\Phi(D)} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int\limits_{D} f(\Phi(\mathbf{u}))\left|\det \mathbf{J}\Phi(\mathbf{u})\right| d\mathbf{u}$$

**Bemerkung:**

Man beachte, dass im Transformationssatz die Bijektivität von $\Phi$ nur auf dem inneren Bereich $D^0$ gefordert wird – nicht jedoch auf dem Rand!



**Bespiel:** Berechne den Schwerpunkt eines homogenen Kugeloktanten:

$$V = \{(x, y, z,)^T \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \,\wedge\, x, y, z \geq 0\}$$

Hier ist es einfacher den Schwerpunkt in Kugelkoordinaten zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ r\sin\varphi\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \psi)$$

Die Transformation ist auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert und mit

$$D = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

gilt $\Phi(D) = V$.

Weiter ist $\Phi$ auf der offenen Menge $D^0$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus und

$$\det \mathbf{J}\Phi(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos\varphi$$

**Bespiel:** (Fortsetzung)

Nach dem Transformationssatz folgt

$$\text{vol}\,(V) = \int_V d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos\psi d\psi d\varphi dr = \frac{\pi}{6}$$

und

$$\begin{aligned}\text{vol}\,(V)\ \cdot x_s \ &= \ \int_V x d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (r\cos\varphi\cos\psi) r^2 \cos\psi d\psi d\varphi dr \\ &= \ \int_0^1 r^3 dr \ \cdot \ \int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \ \cdot \ \int_0^{\pi/2} \cos^2\psi d\psi = \frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

Daraus folgt $x_s = \frac{3}{8}$.

Analog berechnet man $y_s = z_s = \frac{3}{8}$.



**Beispiel: Der Steinersche Satz**

Für das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers $K$ mit Gesamtmasse $m$ gilt bezüglich einer vorgegebenen Drehachse $A$

$$\Theta_A = md^2 + \Theta_S$$

Hierbei ist $S$ die zu $A$ parallele Achse durch den Schwerpunkt $\mathbf{x}_s$ des Körpers $K$ und $d$ der Abstand des Schwerpunktes $\mathbf{x}_s$ von der Achse $A$.

**Idee zur Herleitung:** Setze $\mathbf{x} := \Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{x}_s + \mathbf{u}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\Theta_A \ &= \ \rho \int_K (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle^2) d\mathbf{x} \\ &= \ \rho \int_D (\langle \mathbf{x}_s + \mathbf{u}, \mathbf{x}_s + \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{x}_s + \mathbf{u}, \mathbf{a}\rangle^2) d\mathbf{x}\end{aligned}$$

wobei

$$D := \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_s \ : \ \mathbf{x} \in K\}$$