Satz:

1) **Linearität**

$$\int_D (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \alpha \int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \beta \int_D g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

2) **Monotonie**

Gilt $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$, so folgt:

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int_D g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

3) **Positivität**

Gilt für alle $\mathbf{x} \in D$ die Beziehung $f(\mathbf{x}) \geq 0$, so folgt:

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq 0$$

Satz: (Fortsetzung)

4) Sind D_1, D_2 und D Quader, $D = D_1 \cup D_2$ und $\mathrm{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist $f(\mathbf{x})$ genau dann über D integrierbar, falls $f(\mathbf{x})$ über D_1 und D_2 integrierbar ist, und es gilt:

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{D_1} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{D_2} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

5) Es gilt folgende **Abschätzung** für das Integral

$$\left| \int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| \quad \leq \quad \sup_{\mathbf{x} \in D} |f(\mathbf{x})| \cdot \mathrm{vol}(D)$$

6) **Riemannsches Kriterium:**

$f(\mathbf{x})$ ist genau dann über D integrierbar, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Z \in \mathbf{Z}(D) \quad : \quad O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$$

Satz: **(Satz von Fubini)**

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ integrierbar, $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ein Quader, und existieren die Integrale

$$F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy \qquad \text{bzw.} \qquad G(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx$$

für alle $x \in [a_1, b_1]$ bzw. $y \in [a_2, b_2]$, so gilt

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dydx \qquad \text{bzw.}$$

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dxdy$$

Bedeutung: Rückführung auf eindimensionale Integration möglich

Beispiel: Gegeben sei der Quader $D = [0,1] \times [0,2]$ sowie die Funktion

$$f(x,y) = 2 - xy$$

Stetige Funktionen sind über Quadern integrierbar (kommt gleich), daher können wir den Satz von Fubini anwenden:

$$\begin{aligned}\int_d f(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_0^2\int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^2 \left[2x - \frac{x^2y}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^2 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy = \left[2y - \frac{y^2}{4}\right]_{y=0}^{y=2} = 3\end{aligned}$$

Bemerkung: Der Satz von Fubini verlangt als Voraussetzung die Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$. Die Existenz der beiden Integrale $F(x)$ und $G(y)$ alleine garantiert die Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$ **nicht**!

Definition:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Wir setzen

$$f^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & : \text{ falls } \mathbf{x} \in D \\ 0 & : \text{ falls } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases}$$

Speziell für $f(\mathbf{x}) = 1$ heißt $f^*(\mathbf{x})$ die **charakteristische** Funktion von D. Diese wird mit $\mathcal{X}_D(\mathbf{x})$ bezeichnet.

Sei nun Q der kleinste Quader mit $D \subset Q$. Dann definieren wir:

1) Die Funktion $f(\mathbf{x})$ heißt **integrierbar** über D, falls $f^*(\mathbf{x})$ über Q integrierbar ist. In diesem Fall setzen wir

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_Q f^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Definition: (Fortsetzung)

2) Die kompakte Menge heißt **messbar**, falls das Integral

$$\text{vol}(D) := \int_D 1 d\mathbf{x} = \int_Q \mathcal{X}_D(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

existiert.

Man nennt dann vol(D) das **Volumen** von D.

Die kompakte Menge D heißt **Nullmenge**, falls D messbar ist und vol$(D) = 0$ gilt.

Bemerkung:

Ist die Menge D selbst ein Quader, so folgt $Q = D$ und der Integrationsbegriff von oben stimmt mit dem vorhergehend diskutierten überein.
Das durch vol(D) bezeichnete Volumen ist dann auch das tatsächliche Volumen des Quaders (im $\mathbb{R}^n$).

Wir fassen drei wichtige Eigenschaften der mehrdimensionalen Integration zusammen:

1) **Satz:**
   Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist D genau dann messbar, falls der Rand ∂D von D eine Nullmenge ist.

2) **Satz:**
   Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar und sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(\mathbf{x})$ integrierbar über D.

3) **Mittelwertsatz:**
   Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, zusammenhängend und messbar und ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es einen Punkt $\xi \in D$ mit

$$\int_d f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f(\xi) \cdot \text{vol}(D)$$

Definition:

1) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt ein **Normalbereich**, falls es stetige Funktionen g, h bzw. $\bar{g}, \bar{h}$ gibt mit

$$D = \{(x, y) \ : \ a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

   bzw.

$$D = \{(x, y) \ : \ \bar{a} \leq y \leq \bar{b} \wedge \bar{g}(y) \leq x \leq \bar{h}(y)\}$$

2) Analog heißt eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ ein **Normalbereich**, falls es eine Darstellung

$$\begin{aligned} D \ = \ \{ \ (x_1, x_2, x_3) \ : \ a \leq x_i \leq b \quad &\wedge \quad g(x_i) \leq x_j \leq h(x_i) \\ &\wedge \quad \varphi(x_i, x_j) \leq x_k \leq \psi(x_i, x_j) \ \} \end{aligned}$$

   gibt mit einer Permutation (i, j, k) von $(1, 2, 3)$ und stetigen Funktionen g, h, φ und ψ.

Definition: (Fortsetzung)

3) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **projizierbar** in Richtung x_i, $i \in \{1, \ldots .n\}$, falls es eine messbare Menge $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und stetige Funktionen φ, ψ gibt, so dass

$$D = \{ \, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \; : \; \tilde{\mathbf{x}} \; = \; (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)^T \in B \\ \wedge \, \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) \leq x_i \leq \psi(\tilde{\mathbf{x}}) \, \}$$

Bemerkung:

1) Projizierbare Mengen sind stets messbar. Damit sind auch alle Normalbereiche messbar, denn sie sind projizierbar.

2) Häufig läßt sich der Integrationsbereich D als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche darstellen. Solche Bereich sind dann ebenfalls messbar.