Beispiele:

1) Für die Kreisgleichung $g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad r > 0$ findet man im Punkt $(x^0, y^0) = (0, r)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,r) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,r) = 2r \neq 0$$

Man kann also in einer Umgebung von $(0,r)$ die Kreisgleichung nach y auflösen:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Die Ableitung $f'(x)$ kann man durch **implizite Diffentiation** berechnen:

$$g(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_x(x,y) + g_y(x,y)y'(x) = 0$$

Also

$$2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) = -\frac{x}{y}$$

Beispiele: (Fortsetzung)

2) Betrachte die Gleichung

$$g(x,y) = e^{y-x} + 3y + x^2 - 1 = 0$$

Es gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = e^{y-x} + 3 > 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Die Gleichung ist also für jedes $x \in \mathbb{R}$ nach $y =: f(x)$ auflösbar und $f(x)$ ist eine stetig differenzierbare Funktion.

Implizite Differentiation:

$$e^{y-x}(y' - 1) + 3y' + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{e^{y-x} - 2x}{e^{y-x} + 3}$$

Eine **explizite** Auflösung nach y ist in diesem Fall nicht möglich!

Bemerkung: Implizites Differenzieren einer durch

$$g(x,y) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$$

implizit definierten Funktion $y = f(x)$, $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{g_x}{g_y} \\ f''(x) &= -\frac{g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x^2}{g_y^3} \end{aligned}$$

Daher ist der Punkt x^0 ein stationärer Punkt von $f(x)$, falls gilt:

$$g(x^0, y^0) = g_x(x^0, y^0) = 0 \quad \text{und} \quad g_y(x^0, y^0) \neq 0$$

Weiter ist x^0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum), falls

$$\frac{g_{xx}(x^0, y^0)}{g_y(x^0, y^0)} > 0 \qquad \left(\text{bzw. } \frac{g_{xx}(x^0, y^0)}{g_y(x^0, y^0)} < 0 \right)$$

Implizite Darstellung ebener Kurven

Betrachte die Lösungsmenge einer skalaren Gleichungen

$$g(x,y) = 0$$

Gilt

$$\operatorname{grad} g = (g_x, g_y)^T \neq (0,0)^T$$

So definiert $g(x,y)$ lokal eine Funktion $y = f(x)$ oder $x = \bar{f}(y)$.

Definition:

1) Ein Lösungspunkt (x^0, y^0) der Gleichung $g(x,y) = 0$ mit $\operatorname{grad} g(x^0, y^0) \neq (0,0)^T$ heißt **regulärer** Punkt.

1) Ein Lösungspunkt (x^0, y^0) der Gleichung $g(x,y) = 0$ mit $\operatorname{grad} g(x^0, y^0) = (0,0)^T$ heißt **singulärer** Punkt.

Lemma:

1) Gilt für einen regulären Punkt (x^0, y^0)
$$g_x(\mathbf{x}^0) = 0, \quad g_y(\mathbf{x}^0) \neq 0$$
so besitzt die Lösungskurve eine **horizontale Tangente** in $\mathbf{x}^0$.

2) Gilt für einen regulären Punkt (x^0, y^0)
$$g_x(\mathbf{x}^0) \neq 0, \quad g_y(\mathbf{x}^0) = 0$$
so besitzt die Lösungskurve eine **vertikale Tangente** in $\mathbf{x}^0$.

3) Ist $\mathbf{x}^0$ ein **singulärer Punkt** so wird die Lösungsmenge bei $\mathbf{x}^0$ durch folgende **quadratische Gleichung** approximiert:
$$g_{xx}(\mathbf{x}^0)(x-x^0)^2 + 2g_{xy}(\mathbf{x}^0)(x-x^0)(y-y^0) + g_{yy}(\mathbf{x}^0)(y-y^0)^2 = 0$$

Wegen 3) erhält man für $g_{xx}, g_{xy}, g_{yy} \neq \mathbf{0}^T$:

$\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) > 0$: $\mathbf{x}^0$ ist ein **isolierter Punkt** der Lösungsmenge

$\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) < 0$: $\mathbf{x}^0$ ist ein **Doppelpunkt**

$\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) = 0$: $\mathbf{x}^0$ ist ein **Rückkehrpunkt** oder auch **Spitze**

Interpretation:

1) Gilt $\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) > 0$, so sind beide Eigenwerte von $\mathbf{H}g(\mathbf{x}^0)$ entweder strikt positiv oder strikt negativ, d.h. $\mathbf{x}^0$ ist ein strenges lokales **Minimum** oder **Maximum** von $g(\mathbf{x})$.

2) Gilt $\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) < 0$, so haben die beiden Eigenwerte von $\mathbf{H}g(\mathbf{x}^0)$ ein unterschiedliches Vorzeichen, d.h. $\mathbf{x}^0$ ist ein **Sattelpunkt** von $g(\mathbf{x})$.

3) Gilt $\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) = 0$, so ist der stationäre Punkt $\mathbf{x}^0$ von $g(\mathbf{x})$ **ausgeartet**.

Beispiele: Wir betrachten jeweils den singulären Punkt $\mathbf{x}^0$:

1) Gegeben sei die implizite Gleichung

$$g(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x-2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned} g_x &= y^2 + 3x^2 - 4x \\ g_y &= 2y(x-1) \\ g_{xx} &= 6x - 4 \\ g_{xy} &= 2y \\ g_{yy} &= 2(x-1) \\ \mathbf{H}g(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ein isolierter Punkt.

Beispiele: (Fortsetzung)

2) Gegeben sei die implizite Gleichung

$$g(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x+q^2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned} g_x &= y^2 + 3x^2 + 2xq^2 \\ g_y &= 2y(x-1) \\ g_{xx} &= 6x + 2q^2 \\ g_{xy} &= 2y \\ g_{yy} &= 2(x-1) \\ \mathbf{H}g(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} 2q^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ für $q \neq 0$ ein Doppelpunkt.

Beispiele: (Fortsetzung)

3) Gegeben sei die implizite Gleichung

$$g(x,y) = y^2(x-1) + x^3 = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned} g_x &= y^2 + 3x^2 \\ g_y &= 2y(x-1) \\ g_{xx} &= 6x \\ g_{xy} &= 2y \\ g_{yy} &= 2(x-1) \\ \mathbf{H}g(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ein Rückkehrpunkt.

Implizite Darstellung von Flächen

Lösungsmenge einer skalaren Gleichung $g(x,y,z) = 0$ ist für grad $g \neq \mathbf{0}^T$ lokal eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Tangentialebene in $\mathbf{x}^0$ mit $g(\mathbf{x}^0) = 0$ und grad $g(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}^T$:

$$g_x(\mathbf{x}^0)(x - x^0) + g_y(\mathbf{x}^0)(y - y^0) + g_z(\mathbf{x}^0)(z - z_0) = 0$$

d.h. der Gradient steht senkrecht auf der Fläche $g(x,y,z) = 0$.

Ist zum Beispiel $g_z(\mathbf{x}^0) \neq$, so gibt es lokal bei $\mathbf{x}^0$ eine Darstellung der Form

$$z = f(x,y)$$

Partielle Ableitungen von $f(x,y)$:

$$\text{grad}\, f(x,y) = (f_x, f_y) = -\frac{1}{g_z}(g_x, g_y) = \left(-\frac{g_x}{g_z}, \frac{g_y}{g_z}\right)$$

Das Umkehrproblem

Frage: Lässt sich ein vorgegebenes Gleichungssystem

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, nach $\mathbf{x}$ auflösen, also **invertieren**?

Satz: Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine $\mathcal{C}^1$–Funktion.

Ist für ein $\mathbf{x}^0 \in D$ die Jacobi–Matrix $\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ regulär, so gibt es Umgebungen U und V von $\mathbf{x}^0$ und $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$, so dass $\mathbf{f}$ den Bereich U **bijektiv** auf V abbildet.

Die Umkehrfunktion $\mathbf{f}^{-1} : V \to U$ ist ebenfalls eine $\mathcal{C}^1$–Funktion und es gilt für alle $\mathbf{x} \in U$:

$$\mathbf{J}\,\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = (\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Bemerkung: Man nennt dann $\mathbf{f}$ lokal einen $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus.