Richtungsableitungen

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{x}^0 \in D$. Für einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0)}{t}$$

die **Richtungsableitung (Gateaux–Ableitung)** von $f(\mathbf{x})$ in Richtung $\mathbf{v}$.

Beispiel: Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $\mathbf{v} = (1, 1)^T$. Dann gilt für die Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(x, y) &= \lim_{t \to 0} \frac{(x+t)^2 + (y+t)^2 - x^2 - y^2}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{2xt + t^2 + 2yt + t^2}{t} \\ &= 2(x + y) \end{aligned}$$

Bemerkung:

1) Für $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ ist die Richtungsableitung gerade die partielle Ableitung nach x_i:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)$$

2) Ist $\mathbf{v}$ ein Einheitsvektor, also $\|\mathbf{v}\| = 1$, so beschreibt die Richtungsableitung $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0)$ die Steigung von $f(\mathbf{x})$ in Richtung $\mathbf{v}$.

3) Ist $f(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$ differenzierbar, so existieren sämtliche Richtungsableitungen von $f(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$ und es gilt:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \text{grad}\, f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{v}$$

Dies folgt aus Anwendung der Kettenregel für $\mathbf{h}(t) := \mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}$

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{h})|_{t=0} = \text{grad}\, f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{h}'(0)$$

Satz: (Eigenschaften des Gradienten)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in $\mathbf{x}^0 \in D$ differenzierbar.

1) Der Gradientenvektor grad $f(\mathbf{x}^0) \in \mathbb{R}^n$ steht senkrecht auf der **Niveaumenge**

$$N_{\mathbf{x}^0} := \{\mathbf{x} \in D \,:\, f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)\}$$

Im Fall $n = 2$ nennt man die Niveaumengen auch **Höhenlinien**, im Fall $n = 3$ heißen die Niveaumengen auch **Äquipotentialflächen**.

2) Der Gradient grad $f(\mathbf{x}^0)$ gibt die Richtung des steilsten Anstiegs von $f(\mathbf{x})$ im Punkt $\mathbf{x}^0$ an.

Beweisidee:

1) Anwendung der Kettenregel

2) Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

$$|D_{\mathbf{v}}\, f(\mathbf{x}^0)| \;\le\; \|\text{grad}\, f(\mathbf{x}^0)\|_2$$

Krummlinige Koordinaten

Sei $\mathbf{\Phi} : U \to V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung, für die die Jacobimatrix $\mathbf{J\Phi}(\mathbf{u}^0)$ an jeder Stelle $\mathbf{u}^0 \in U$ regulär ist.

Weiter existiere die Umkehrabbildung $\mathbf{\Phi}^{-1} : V \to U$ und sei ebenfalls eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung.

Dann definiert $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{u})$ eine Koordinatentransformation von den Koordinaten $\mathbf{u}$ auf $\mathbf{x}$.

Beispiel: Polarkoordinaten

Betrachte für $n = 2$ die (Polar)Koordinaten $\mathbf{u} = (r, \varphi)$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ und setze

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

mit den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x} = (x, y)$.

Umrechung von partiellen Ableitungen von $\mathbf{u}$ auf $\mathbf{x}$

Zunächst gelten für alle $\mathbf{u} \in U$ mit $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{u})$ die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{\Phi}(\mathbf{u})) &= \mathbf{u} \\ \mathbf{J}\,\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}\,\mathbf{\Phi}(\mathbf{u}) &= \mathbf{I}_n \qquad \text{(Kettenregel)} \\ \mathbf{J}\,\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{J}\,\mathbf{\Phi}(\mathbf{u}))^{-1} \end{aligned}$$

Sei nun $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und setze

$$f(\mathbf{u}) := \tilde{f}(\mathbf{\Phi}(\mathbf{u}))$$

Dann folgt aus der Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{\Phi}_j}{\partial u_i} =: \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

mit

$$g^{ij} := \frac{\partial \mathbf{\Phi}_j}{\partial u_i}, \qquad \mathbf{G}(\mathbf{u}) := (g^{ij}) = (\mathbf{J}\,\mathbf{\Phi}(\mathbf{u}))^T$$

Abkürzende Schreibweise:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Analog lassen sich die partiellen Ableitungen nach x_i durch die partiellen Ableitungen nach u_j ausdrücken:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j}$$

mit

$$(g_{ij}) := (g^{ij})^{-1} = (\mathbf{J}\,\mathbf{\Phi})^{-T} = (\mathbf{J}\,\mathbf{\Phi}^{-1})^T$$

Man erhält diese Beziehungen durch Anwendung der Kettenregel auf die Funktion $\mathbf{\Phi}^{-1}$.

Beispiel: (Polarkoordinaten)

Wir betrachten die Polarkoordinaten

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Dann berechnet man

$$\mathbf{J}\,\mathbf{\Phi}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

und damit

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ & \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ & \\ \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Die Umrechnung der partiellen Ableitungen lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{aligned}$$

Damit lässt sich etwa der **Laplace–Operator** auf Polarkoordinaten umrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r} \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

Beispiel: **(Kugelkoordinaten)**

Wir betrachten die Kugelkoordinaten

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Die Jacobi–Matrix ist dann gegeben durch:

$$\mathbf{J}\,\mathbf{\Phi}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\varphi\,\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r\cos\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\,\cos\varphi\,\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\varphi\,\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r\cos\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\,\sin\varphi\,\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} \end{aligned}$$

Laplace–Operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\tan\theta}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\theta}$$