Analysis III für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Jens Struckmeier

Fachbereich Mathematik

Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg

Wintersemester 2006/07

Kapitel 1: Differentialrechnung mehrerer Variablen

1.1 Partielle Ableitungen

Im Folgenden sei

$f(x_1, \ldots, x_n)$ eine skalare Funktion, die von n Variablen abhängt

Beispiel:

Die Zustandsgleichung eines idealen Gases lautet $pV = RT$.
Jede Größe p, V und T läßt sich als Funktion der anderen darstellen:

$$\begin{aligned} p &= p(V,t) = \frac{RT}{V} \\ V &= V(p,T) = \frac{RT}{p} \\ T &= T(p,V) = \frac{pV}{R} \end{aligned}$$

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}^0 \in D$.

1) $f(\mathbf{x})$ heißt in $\mathbf{x}^0$ nach x_i **partiell differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) &:= \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + t, \ldots, x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n)}{t}\end{aligned}$$

existiert. Dabei bezeichnet $\mathbf{e}_i$ den i–ten Einheitsvektor.
Den Grenzwert nennt man die **partielle Ableitung** von $f(\mathbf{x})$ nach x_i im Punkt $\mathbf{x}^0$.

2) Existieren für jeden Punkt $\mathbf{x}^0$ die partiellen Ableitungen nach jeder Variablen $x_i, i = 1, \ldots, n$ und sind diese **stetige Funktionen**, so nennt man $f(\mathbf{x})$ **stetig partiell differenzierbar** oder eine $\mathcal{C}^1$**–Funktion**.

Beispiele:

1) Betrachte die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Für einen Punkt $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ existieren beide partiellen Ableitungen und diese sind auch stetig:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) = 2x_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0) = 2x_2$$

Die Funktion ist also eine $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$–Funktion.

2) Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

ist im Punkt $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$ partiell differenzierbar nach der Koordinate x_1, aber die partielle Ableitung nach x_2 existiert im Ursprung **nicht**!

Konkretes Beispiel:

Der Schalldruck einer 1–d Schallwelle ist gegeben durch

$$p(x,t) = A\sin(\alpha x - \omega t)$$

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha A\cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt zu einer festen Zeit t die örtliche Änderungsrate des Schalldrucks.

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\omega A\cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt für einen festen Ort x die zeitliche Änderung des Schalldruckes.

Bemerkungen:

1) Sind f, g partiell nach x_i differenzierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gelten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) &= \alpha\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \beta\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \\
\frac{\partial}{\partial x_i}(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \\
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\right) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})^2}, \qquad g(\mathbf{x}) \neq 0
\end{aligned}$$

2) Man verwendet auch **andere Bezeichnungen**:

$$D_i f(\mathbf{x}^0) \qquad \text{oder} \qquad f_{x_i}(\mathbf{x}^0)$$

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in einem Punkt $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}$ (nach allen Koordinaten) partiell differenzierbar.

1) Der **Zeilenvektor**

$$Df(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \right)$$

heißt **die Ableitung von $f(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$**.

2) Man schreibt auch als **Spaltenvektor**:

$$\text{grad}\, f(\mathbf{x}^0) = \nabla f(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \right)^T$$

und bezeichnet dies als **Gradient**, den symbolischen Vektor

$$\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})^T$$

als den **Nabla–Operator**.

Bemerkung: Seien $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{x})$ partiell differenzierbar auf D.
Dann gelten die folgenden **Differentiationsregeln**:

$$\begin{aligned}
\text{grad}\,(\alpha f + \beta g) &= \alpha \cdot \text{grad}\, f + \beta \cdot \text{grad}\, g \\
\text{grad}\,(f \cdot g) &= g \cdot \text{grad}\, f + f \cdot \text{grad}\, g \\
\text{grad}\, \left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{1}{g^2}\,(g \cdot \text{grad}\, f - f \cdot \text{grad}\, g), \quad g \neq 0
\end{aligned}$$

Beispiel:

1) Sei $f(x,y) = e^x \cdot \sin y$. Dann gilt:

$$\text{grad}\, f(x,y) = (e^x \cdot \sin y, e^x \cdot \cos y)^T = e^x(\sin y, \cos y)^T$$

2) Für $r(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|_2$ gilt:

$$\text{grad}\, r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \qquad (\mathbf{x} \neq 0)$$

Wichtige Beobachtung:

Eine nach allen Koordinaten partiell differenzierbare Funktion ist **NICHT unbedingt stetig!!!**

Beispiel: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{(x^2+y^2)^2} & : \text{ für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & : \text{ für } (x,y) = 0 \end{cases}$$

Die Funktion ist auf **ganz** $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar und

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= f_y(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y}{(x^2+y^2)^2} - 4\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^3}, \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x}{(x^2+y^2)^2} - 4\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^3}, \quad (x,y) \neq (0,0) \end{aligned}$$

Beispiel: (Fortsetzung)
Berechnung der partiellen Ableitungen im Punkt $(x^0, y^0) = (0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{\dfrac{t \cdot 0}{(t^2+0^2)^2} - 0}{t} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{\dfrac{0 \cdot t}{(0^2+t^2)^2} - 0}{t} = 0 \end{aligned}$$

Aber: Im Punkt $(x^0, y^0) = (0,0)$ ist die Funktion **nicht** stetig:

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} = \frac{n^2}{4} \to \infty$$

Also gilt:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) = 0$$

Damit eine partiell differenzierbare Funktion **auch** stetig ist, benötigt man zusätzliche Eigenschaften, z.B.

Alle partiellen Ableitungen sind beschränkt.

Satz:

Ist $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar, und sind die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, dort **beschränkt**, so ist $f(\mathbf{x})$ **stetig** in $\mathbf{x}^0$.

Bemerkung:

In unserem **Beispiel** sind die partiellen Ableitungen in einer Umgebung vom Punkt $(x^0, y^0) = (0, 0)$ **nicht** beschränkt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^2} - 4\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^3}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Beweis des Satzes:

Für $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty < \varepsilon$, ε hinreichend klein, schreiben wir:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) &= (f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) - f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^0)) \\ &+ (f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^0) - f(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}^0,x_n^0)) \\ &\vdots \\ &+ (f(x_1,x_2^0,\dots,x_n^0) - f(x_1^0,\dots,x_n^0)) \end{aligned}$$

Bei jeder Differenz auf der linken Seite, betrachten wir f als eine Funktion **einer** Variablen, zum Beispiel

$$g(x_n) - g(x_n^0) := f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) - f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^0)$$

Da f partiell differenzierbar, ist g differenzierbar und es gilt der Mittelwertsatz:

$$g(x_n) - g(x_n^0) = g'(\xi_n)(x_n - x_n^0)$$

für ein geeignetes ξ_n zwischen x_n und x_n^0.

Anwendung des **MWS** für Funktionen **einer** Variablen auf jeden Term der rechten Seite ergibt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_n) \cdot (x_n - x_n^0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_n^0) \cdot (x_{n-1} - x_{n-1}^0) \\ &\vdots \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) \cdot (x_1 - x_1^0) \end{aligned}$$

Sind die partiellen Ableitungen in der Umgebung $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty < \varepsilon$ **beschränkt**, so gilt:

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| \leq C_1|x_1 - x_1^0| + \ldots + C_n|x_n - x_n^0|$$

und damit ist $f(\mathbf{x})$ **stetig** in $\mathbf{x}^0$, denn

$$f(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x}^0) \qquad \text{für} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty \to 0$$

Höhere Ableitungen

Definition:

Eine skalare Funktion $f(\mathbf{x})$ sei auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Sind die partiellen Ableitungen wiederum partiell differenzierbar, so erhält man **die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Beispiel: Partielle Ableitungen zweiter Ordnung einer Funktion $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Sei nun $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann definiert man rekursiv

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \ldots \partial x_{i_1}}\right)$$

Definition: (Fortsetzung)

Die Funktion $f(\mathbf{x})$ heißt k**–fach partiell differenzierbar**, falls alle Ableitungen der Ordnung k auf D existieren:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} = D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f = f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$$

Sind all diese Ableitungen zudem stetig, so heißt die Funktion $f(\mathbf{x})$ k**–fach stetig partiell differenzierbar** oder auch C^k**–Funktion** auf D, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Stetige Funktionen $f(\mathbf{x})$ nennt man auch C^0**–Funktionen**.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^i$.

Dann gilt:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_n \dots \partial x_1} =?$$

ACHTUNG:

Die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen durchzuführen sind, ist i. Allg. **nicht beliebig vertauschbar**!

Beispiel: Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & : \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \text{ für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Man berechnet direkt

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1 \\ f_{yx}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = +1 \end{aligned}$$

Satz: (Vertauschbarkeitssatz von Schwarz)

Ist $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine C^2–Funktion, so gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)$$

Beweisidee:

Zweifache Anwendung des Mittelwertsatzes.

Folgerung:

Ist $f(\mathbf{x})$ eine C^k–Funktion, so kann man die Reihenfolge der Differentiationen zur Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur k–ten Ordnung **beliebig** vertauschen!

Beispiel: Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = y^2 z \sin(x^3) + (\cosh y + 17e^{x^2})z^2$$

Zu berechnen ist die partielle Ableitung dritter Ordnung f_{xyz}.
Die Reihenfolge der Ableitungen ist vertauschbar, da $f \in C^3$.

1) Leite zunächst nach z ab:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2})$$

2) Jetzt leiten wir f_z nach x (damit fällt $\cosh y$ raus):

$$\begin{aligned} f_{zx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2})\right) \\ &= 3x^2 y^2 \cos(x^3) + 68xze^{x^2} \end{aligned}$$

3) Für die partielle Ableitung von f_{zx} nach y erhalten wir:

$$f_{xyz} = 6x^2 y \cos(x^3)$$